4. Pendule conique ☺☺☺

a) et b)

Système : point matériel (M)

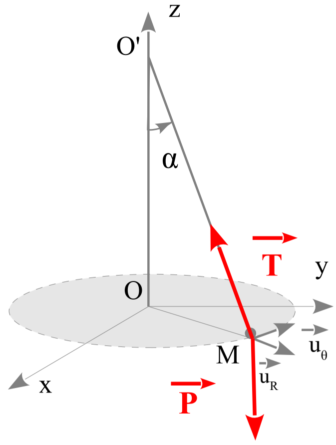
Repère d'espace : $R(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$

Coordonnées : polaires (R, θ)

Base de projection la mieux adaptée : $(\vec{u}_R, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$,

Vecteurs cinématiques :

$\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = R\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{R}}$, $\vec{\boldsymbol{v}} = R\dot{\theta}\vec{\boldsymbol{u}}_\theta = R\omega\vec{\boldsymbol{u}}_\theta$ et $\vec{\boldsymbol{a}} = -R\omega^2\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{R}}$ car ω est constante.



Bilan des forces :

- Poids : $\vec{P} = -mg\vec{u}_z$
- Tension du fil : $\vec{T} = T\cos\alpha\,\vec{u}_z - T\sin\alpha\,\vec{u}_R$

2ème loi d Newton : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T}$

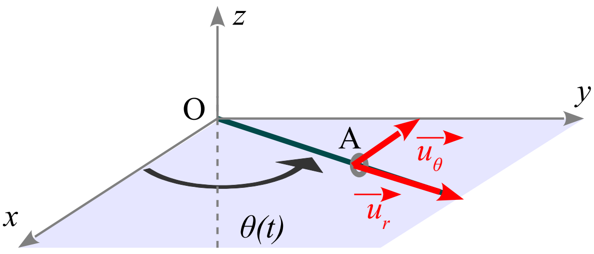
- Par projection suivant $\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{R}}$: $-mR\omega^2 = -T\sin\alpha$ or $R = L\sin\alpha$ d'où $\boxed{\boldsymbol{T = mL\omega^2}}$.
- Par projection suivant $\vec{\boldsymbol{u}}_z$:

$0 = -mg + T\cos\alpha$ $\cos\alpha = \dfrac{mg}{T}$ d'où $\boxed{\boldsymbol{\cos\alpha = \dfrac{g}{L\omega^2}}}$

c) Ce mouvement est possible si les paramètres du problème vérifient : $\cos\alpha \leq 1$ d'où $\boxed{\boldsymbol{\omega \geq \sqrt{\dfrac{g}{L}}}}$.

5. <u>Mouvement d'un anneau sur une tige en rotation</u> ☺☺☺

1. *Ci-contre*



2. *Bilan des forces:*

Poids : $\vec{P}=-mg\vec{u}_z$

Réaction de la tige: $\vec{R}=R_z\vec{u}_z+R_\theta\vec{u}_\theta$ (elle est orthogonale à la tige car il n'y a pas de frottement)

3. *Référentiel terrestre supposé galiléen. Repère d'espace :* $R(O,\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$

Coordonnées : polaires (r, θ). Base de projection la mieux adaptée : $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_z)$,

Vecteurs cinématiques : $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}=r\vec{\boldsymbol{u}}_r$, $\vec{\boldsymbol{v}}=\dot{r}\vec{u}_r+r\dot{\theta}\vec{\boldsymbol{u}}_\theta$ et $\vec{\boldsymbol{a}}=\ddot{r}\vec{\boldsymbol{u}}_r+2\dot{r}\dot{\theta}\vec{\boldsymbol{u}}_\theta-r\dot{\theta}^2\vec{u}_r=(\ddot{r}-r\omega^2)\vec{u}_r+2\dot{r}\omega\vec{\boldsymbol{u}}_\theta$.

2ème loi d Newton : $m\vec{a}=\vec{P}+\vec{R}$

Par projection suivant $\vec{\boldsymbol{u}}_r$: $m(\ddot{r}-r\omega^2)=0$: cette équation est l'équation différentielle du mouvement, on peut la simplifier par m, on obtient alors: $\boxed{(\ddot{r}-r\omega^2)=0}$ (1)

Par projection suivant $\vec{\boldsymbol{u}}_\theta$: $2m\dot{r}\omega^2=R_\theta$ (2)

Par projection suivant $\vec{\boldsymbol{u}}_z$ $0=R_z-mg$ (3).

4. La solution de l'équation (1) est $r(t)=Ae^{\omega t}+Be^{-\omega t}$, on détermine A et B gâce aux conditions initiales:

$r(0)=\frac{L}{2}=A+B$ et $\dot{r}(0)=0=A\omega-B\omega$. On tire de ces deux équations $A=B=\frac{L}{4}$ d'où $\boxed{r(t)=\frac{L}{4}(e^{\omega t}+e^{-\omega t})=\frac{L}{2}ch(\omega t)}$. Le temps τ vérifie l'équation : $L=\frac{L}{4}(e^{\omega\tau}+e^{-\omega\tau})$. On résoud cette équation en posant $X=e^{\omega\tau}$, on obtient alors l'équation: $4=X+\frac{1}{X}$ soit $X^2-4X+1=0$. Le discriminant est égal à: $\Delta=4^2-4=12=4\times3$

d'où les 2 solutions : $X_1=2-\sqrt{3}$ et $X_2=2+\sqrt{3}$. La solution retenue est X_2 car $e^{\omega\tau}>1$ on en déduit: $\boxed{\tau=\frac{1}{\omega}\ln(2+\sqrt{3})}$.

5. $2m\dot{r}\omega^2=R_\theta$ D'où $\boxed{R_\theta=mL\frac{\omega^3}{2}(e^{\omega t}-e^{-\omega t})}$

6. Résolution de problème : Corde vibrante et rayon d'une sphère ☺☺☺

fréquence du mode fondamental $f_1=\frac{c}{2L}$.

fréquence des modes suivants : $f_n=nf_1=\frac{nc}{2L}$

Expérience (a) : $c_a=\sqrt{\frac{T_a}{\mu}}=\sqrt{\frac{mg}{\mu}}$ et $f_2=2f_1=\frac{c_a}{L}=\frac{1}{L}\sqrt{\frac{mg}{\mu}}$

Expérience (b) : $c_b=\sqrt{\frac{T_b}{\mu}}=\sqrt{\frac{mg-\rho Vg}{\mu}}$ et $f_5=5f_{1b}=\frac{5c_b}{2L}=\frac{5}{2L}\sqrt{\frac{mg-\rho Vg}{\mu}}$

D'après l'énoncé « on ne change pas la configuration » d'où $f_2=f_5$ soit : $\frac{1}{L}\sqrt{\frac{mg}{\mu}}=\frac{5}{2L}\sqrt{\frac{mg-\rho Vg}{\mu}}$ soit $2mg=5(mg-\rho Vg)$ soit $3m=\rho V=\frac{\rho\times 4}{3}\pi R^3$ soit $\boldsymbol{R=\left[\frac{9m}{4\rho\pi}\right]^{\frac{1}{3}}}$

AN : $\boxed{\boldsymbol{R=\left[\frac{9\times 2}{4\times 1000\times 3}\right]^{\frac{1}{3}}=\left[\frac{3}{2\times 1000}\right]^{\frac{1}{3}}=0{,}11}}$ **. Le rayon de la sphère est d'environ 11 cm.**