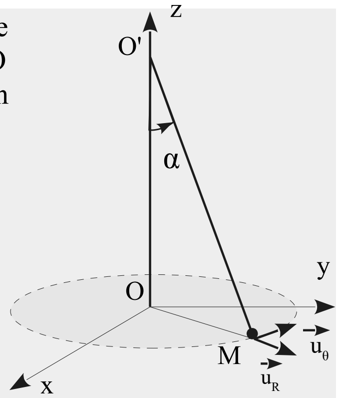
5. Pendule conique ☺☺☺

Un point matériel M de masse m est suspendu à un fil de longueur L inextensible et de masse négligeable attaché en un point fixe O' de l'axe Oz. M décrit un cercle de rayon R de centre O à la vitesse angulaire ω constante dans le plan O*xy* *(fig 1)* . En utilisant la base de projection $(\vec{u}_R, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$:

a) Calculer la tension du fil.

b) Calculer l'inclinaison α du fil par rapport à la verticale. *Rep: cosα=g/(Lω²).*

c) A quelle condition sur ω ce mouvement peut-il avoir lieu ?



Solution :

a) et b)

Système : point matériel (M)

Repère d'espace : $R(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$

Coordonnées : polaires (R, θ)

Base de projection la mieux adaptée : $(\vec{u}_R, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$,

Vecteurs cinématiques :

$\vec{OM} = R\vec{u}_R$, $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta = R\omega\vec{u}_\theta$ et $\vec{a} = -R\omega^2\vec{u}_R$ car ω est constante.

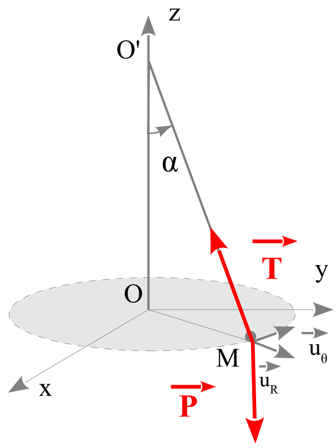
Bilan des forces :

- Poids : $\vec{P} = -mg\vec{u}_z$
- Tension du fil : $\vec{T} = T\cos\alpha\,\vec{u}_z - T\sin\alpha\,\vec{u}_R$

2ème loi d Newton : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T}$

- Par projection suivant $\vec{u}_R$: $-mR\omega^2 = -T\sin\alpha$ or $R = L\sin\alpha$ d'où $\boxed{T = mL\omega^2}$.
- Par projection suivant $\vec{u}_z$:

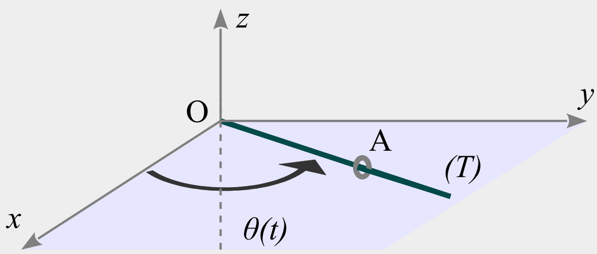
$0 = -mg + T\cos\alpha$ $\cos\alpha = \dfrac{mg}{T}$ d'où $\boxed{\cos\alpha = \dfrac{g}{L\omega^2}}$



c) Ce mouvement est possible si les paramètres du problème vérifient : $\cos\alpha \le 1$ d'où $\boxed{\omega \ge \sqrt{\dfrac{g}{L}}}$.

6. Mouvement d'un anneau sur une tige en rotation ☺☺☺

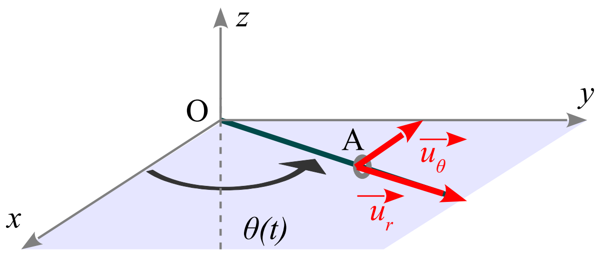
Dans le référentiel *R(O, x, y, z)* supposé galiléen une tige *(T)* de longueur L est soudée à l' axe vertical *Oz* en O comme l'indique la figure ci-contre.
Elle tourne avec une vitesse angulaire constante ω autour cet axe tout en restant dans le plan *(O, x, y)* horizontal.
Un anneau A de masse m enfilé sur la tige est abandonné sans vitesse initiale à la distance L/2 de l'axe , il glisse sans frottement sur la tige. On repère le point A grâce à ses coordonnées polaires (*r, θ*).



1) Reproduire le schéma et représenter la base cylindrique.
2) Faire le bilan des forces s'exerçant sur l'anneau, exprimer leurs coordonnées dans la base cylindrique $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.
3) En déduire l'équation différentielle du mouvement de l'anneau sur la tige.
4) Déterminer la durée τ au bout de laquelle l'anneau atteint l'extrémité de la tige.
5) Déterminer les composantes de la réaction $\vec{R}$ de la tige sur l'anneau en fonction du temps.

Solution:

1. *Ci-contre*



2. *Bilan des forces:*

Poids : $\vec{P}=-mg\vec{u}_z$

Réaction de la tige: $\vec{R}=R_z\vec{u}_z+R_\theta\vec{u}_\theta$ (elle est orthogonale à la tige car il n'y a pas de frottement)

3. *Référentiel terrestre supposé galiléen. Repère d'espace :* $R(O,\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$

Coordonnées : polaires (r, θ). Base de projection la mieux adaptée : $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_z)$,

Vecteurs cinématiques : $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}=r\vec{\boldsymbol{u}}_r$, $\vec{\boldsymbol{v}}=\dot{r}\vec{u}_r+r\dot{\theta}\vec{\boldsymbol{u}}_\theta$ et $\vec{\boldsymbol{a}}=\ddot{r}\vec{\boldsymbol{u}}_r+2\dot{r}\dot{\theta}\vec{\boldsymbol{u}}_\theta-r\dot{\theta}^2\vec{u}_r=(\ddot{r}-r\omega^2)\vec{u}_r+2\dot{r}\omega\vec{\boldsymbol{u}}_\theta$.

2ème loi d Newton : $m\vec{a}=\vec{P}+\vec{R}$

Par projection suivant $\vec{\boldsymbol{u}}_r$: $m(\ddot{r}-r\omega^2)=0$: cette équation est l'équation différentielle du mouvement, on peut la simplifier par m, on obtient alors: $\boxed{(\ddot{r}-r\omega^2)=0}$ (1)

Par projection suivant $\vec{\boldsymbol{u}}_\theta$: $2m\dot{r}\omega^2=R_\theta$ (2)

Par projection suivant $\vec{\boldsymbol{u}}_z$ $0=R_z-mg$ (3).

4. La solution de l'équation (1) est $r(t)=Ae^{\omega t}+Be^{-\omega t}$, on détermine A et B grâce aux conditions initiales:

$r(0)=\frac{L}{2}=A+B$ et $\dot{r}(0)=0=A\omega-B\omega$. On tire de ces deux équations $A=B=\frac{L}{4}$ d'où $\boxed{r(t)=\frac{L}{4}(e^{\omega t}+e^{-\omega t})=\frac{L}{2}ch(\omega t)}$. Le temps τ vérifie l'équation : $L=\frac{L}{4}(e^{\omega\tau}+e^{-\omega\tau})$. On résoud cette équation en posant $X=e^{\omega\tau}$, on obtient alors l'équation: $4=X+\frac{1}{X}$ soit $X^2-4X+1=0$. Le discriminant est égal à: $\Delta=4^2-4=12=4\times 3$

d'où les 2 solutions : $X_1=2-\sqrt{3}$ et $X_2=2+\sqrt{3}$. La solution retenue est X_2 car $e^{\omega\tau}>1$ on en déduit: $\boxed{\tau=\frac{1}{\omega}\ln(2+\sqrt{3})}$.

5. $2m\dot{r}\omega^2=R_\theta$ D'où $\boxed{R_\theta=mL\frac{\omega^3}{2}(e^{\omega t}-e^{-\omega t})}$