2. Flipper

Le lanceur d'un flipper est constitué d'un ressort de raideur $k = 360\ N.m^{-1}$ et de longueur à vide $l_0 = 20\ cm$, incliné
Ce ressort est fixé à une extrémité d'une gouttière dans laquelle le ressort et la bille glissent sans frottement. On supposera que le contact entre le ressort et la bille est rompu si la bille est au delà de la longueur à vide du ressort. La gouttière de lancement est placée le long d'un plan incliné d'un angle $\alpha = 20,0°$ avec l'horizontale.

On donne l'accélération de la pesanteur $g = 9,8 m.s^{-2}$.

On appellera O le point d'attache du ressort et $\vec{u}_x$ le vecteur unitaire dirigé dans le sens de l'allongement du ressort. La position de la bille sera donc repérée par son abscisse x le long de cet axe.

1) Réaliser un schéma paramétré du dispositif.

2) Exprimer les différentes énergies potentielles en fonction de x et des données de l'énoncé. Pour l'énergie potentielle élastique, on précisera le domaine de variation de x pour lequel cette écriture est valable.

On choisira l'origine de l'énergie potentielle de pesanteur en $x = 0$ et celle de l'énergie potentielle élastique lorsque le ressort est à sa longueur à vide.

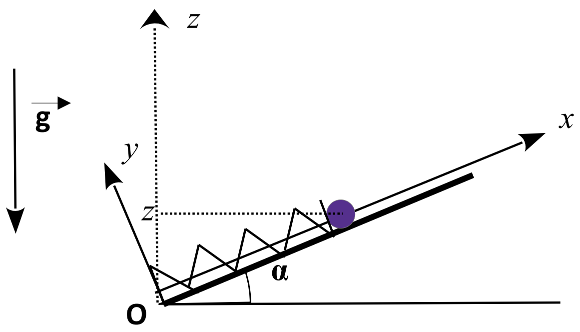
2) Le joueur comprime le ressort de $X_0 = 5,0\ cm$. Déterminer l'expression littérale de la vitesse v_{f1} avec laquelle la bille de masse $m = 100g$ est propulsée. On supposera que la bille est propulsée quand le ressort reprend sa longueur à vide. Faire l'application numérique.

3) La gouttière mesure L=1,2m à partir du point d'attache fixe du ressort. Déterminer la vitesse v_{f2} de la bille à la sortie de la gouttière. On donnera l'expression littérale puis l'expression numérique.

4) Quelle doit être la compression minimale du ressort pour que la bille entre dans le jeu ?

Correction

1) Ci-contre



2) Quelque soit sa position, la bille est soumise à son poids.
L'énergie potentielle de pesanteur est pour un axe Oz ascendant et $E_{PP}(x=0) = 0$: $E_{pp} = m\,g\,z = m\,g\,x \sin\alpha$.

La bille est soumise à l'action du ressort quand $x \le l_0$. L'énergie potentielle élastique est alors : $E_{pe} = \frac{1}{2}k(x-l_0)^2$.

Conclusion :

- Pour $x \le l_0$, l'énergie potentielle de la bille est : $\boxed{E_p = E_{pp} + E_{pe} = m\,g\,x \sin\alpha + \frac{1}{2}k(x-l_0)^2}$
- Pour $x > l_0$, l'énergie potentielle de la bille est : $\boxed{E_p = E_{pp} = \frac{1}{2}k(x-l_0)^2}$

3) Le système considéré est conservatif car il n'y a pas de frottement. On écrit la conservation de l'énergie de la bille entre l'instant initial où le ressort est comprimé de la quantité X_0 et l'instant où la bille quitte le ressort.

$E_{mi} = E_{pi} + E_{Ci} = E_{pi} = m\,g\,x_{min} \sin\alpha + \frac{1}{2}k(x_{min}-l_0)^2 = m\,g\,x_{min} \sin\alpha + \frac{1}{2}k X_0^2$ car la bille est lâchée sans vitesse initiale.

$E_{mf1} = E_{pf1} + E_{Cf1} = m\,g\,l_0 \sin\alpha + \frac{1}{2}k(l_0-l_0)^2 + \frac{1}{2}m v_f^2 = m\,g\,l_0 \sin\alpha + \frac{1}{2}m v_{f1}^2$.

$E_{mi} = E_{mf1}$ ainsi $m\,g\,x_{min} \sin\alpha + \frac{1}{2}k X_0^2 = m\,g\,l_0 \sin\alpha + \frac{1}{2}m v_f^2$ d'où

$\frac{1}{2}m v_{f1}^2 = m\,g(x_{min}-l_0)\sin\alpha + \frac{1}{2}k X_0^2 = -m\,g\,X_0 \sin\alpha + \frac{1}{2}k X_0^2$, soit : $\boxed{v_{f1} = \sqrt{\frac{k}{m}X_0^2 - 2\,g\,X_0 \sin\alpha}}$ car $x_{min} - l_0 = -X_0$. AN : $\boxed{v_{f1} = \sqrt{\frac{360}{10^{-1}} \times 25.10^{-4} - 2 \times 9,8 \times 5.10^{-2} \sin 20} = 2,9\ m.s^{-1}}$.

4) On exprime la conservation de l'énergie mécanique entre l'instant initial et le moment où la bille quitte la gouttière .

$E_{mi}=E_{pi}+E_{Ci}=m\,g\,x_{min}\sin\alpha+\frac{1}{2}k\,X_0^2$; $E_{mf2}=E_{pf2}+E_{Cf2}=m\,g\,L\sin\alpha+\frac{1}{2}m\,v_{f2}^2$. $E_{mi}=E_{mf2}$ ainsi

$m\,g\,x_{min}\sin\alpha+\frac{1}{2}k\,X_0^2=m\,g\,L\sin\alpha+\frac{1}{2}m\,v_{f2}^2$ d'où $\boxed{v_{f2}=\sqrt{\frac{k}{m}X_0^2-2\,g\,(L-l_0+X_0)\sin\alpha}}$ car

$x_{min}=l_0-X_0$. AN : $\boxed{v_{f2}=\sqrt{\frac{360}{10^{-1}}\times 25.10^{-4}-2\times 9{,}8\,(1{,}2-0{,}2+0{,}05)\sin 20}=1{,}4\,m.s^{-1}}$.

On peut également appliquer la conservation de l'énergie entre le moment où la bille quitte le ressort et celui où elle arrive au bout de la gouttière.

$E_{mf1}=m\,g\,l_0\sin\alpha+\frac{1}{2}m\,v_{f1}^2$ et $E_{mf2}=m\,g\,L\sin\alpha+\frac{1}{2}m\,v_{f2}^2$. $E_{mf1}=E_{mf2}$ d'où

$m\,g\,l_0\sin\alpha+\frac{1}{2}m\,v_{f1}^2=m\,g\,L\sin\alpha+\frac{1}{2}m\,v_{f2}^2$ soit $\boxed{v_{f2}=\sqrt{v_{f1}^2-2\,g\,(L-l_0)\sin\alpha}=1{,}4\,m.s^{-1}}$.

4) On trouve X_{0min} pour v_{f2} = *0.* soit $\frac{k}{m}X_0^2-2\,g\,(L-l_0+X_0)\sin\alpha=0$ soit $\frac{k}{m}X_0^2-2\,g\sin\alpha\,X_0-2\,g\,(L-l_0)\sin\alpha=0$.

AN : $3600\,X_0^2-6{,}7\,X_0-6{,}7=0$. $\Delta=6{,}7^2+4\times 6{,}7\times 3600=311^2$. On garde la racine positive soit $\boxed{X_{0\,min}=\frac{6{,}7+311}{2\times 3600}=0{,}044\,m=4{,}4\,cm}$.