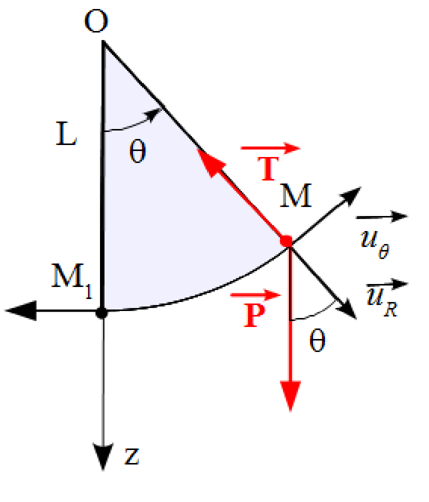
3. Pendule : mesure d'une vitesse



1. Voir ci-contre.

2. On montre que le système est conservatif en faisant le bilan des forces :

La bille est soumis à son poids qui est une force conservative, et la tension du fil qui ne travaille pas. Conclusion : le système est conservatif $\boldsymbol{E_m = E_C + E_P = cste}$.

3. L'énergie cinétique est : $E_C = \frac{1}{2} m v^2$

L' énergies potentielles est : $E_P = -mgz + K = -mgl\cos\theta + mgl$ en prenant l'origine en M_1.

D'où l'expression de la conservation de l'énergie mécanique: $\boldsymbol{Em = \frac{1}{2} m v^2 - mgL\cos\theta + mgL}$.

$Em = Em(t=0) = \frac{1}{2} m 0^2 - mgL\cos(30°) + mgL = mgL\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ d'où $mgL\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2} m v^2 - mgL\cos\theta + mgL$

d'où $\boldsymbol{v = \sqrt{2gL\left(\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}}$

AN : $v_1 = \sqrt{2 \times 9{,}81 \times 1\left(\cos 0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$ d'où $\boldsymbol{v_1 = 1{,}62\ m.s^{-1}}$

4. $\vec{v} = L\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ d'où $Em = \frac{1}{2} m (L\dot{\theta})^2 - mgL\cos\theta + mgL$. On obtient l'équation du mouvement en dérivant l'expression de $\boldsymbol{E_m}$: $\frac{dE_m}{dt} = 0 = \frac{1}{2} m \times 2(L^2\dot{\theta})\ddot{\theta} + \dot{\theta} m g L \sin\theta$ d'où $\boxed{L\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0}$.

Dans le cadre des petits angles $\sin\theta = \theta$. L'équation devient : $\boxed{\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0}$ avec $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$. La solution est du type : $\theta = A\cos\omega t + B\sin\omega t$. A t = 0 $\theta(0) = \theta_0$ d'où $A = \theta_0$. A t = 0 $v(0) = 0$ d'où $B = 0$ d'où $\boxed{\theta = \theta_0 \cos\omega t}$ et $\boxed{v = L\dot{\theta} = -L\omega\theta_0\sin\omega t = -\sqrt{Lg}\,\theta_0\sin\omega t}$. Lorsque le fil est en position verticale $\theta = 0$ donc $\cos\omega t = 0$ d'où $\sin\omega t = \pm 1$ d'où $\boxed{v_1' = \sqrt{Lg}\,\theta_0}$. AN : $\boxed{v_1' = \frac{\sqrt{1 \times 9{,}81} \times \pi}{6} = 1{,}63\ m.s^{-1}}$

Conclusion : avec ou sans approximation on trouve le même résultat à moins de 1% près.

4. Voiture effectuant un looping

1. *Ref : terrestre*

a) On applique le théorème de l'énergie cinétique au chariot entre le point A et le point B soit :

$$\boldsymbol{E_C(B)-E_C(A)=W_{\vec{P}}(A\to B)+W_{\vec{R}}(A\to B)}\quad(1)$$

$$E_C(B)=\frac{1}{2}mV_B^2\ ;\ E_C(A)=\frac{1}{2}mV_A^2=0\ ;$$

$$W_{\vec{P}}(A\to B)=E_p(A)-E_p(B)=mgh-0=mgh\ ;\quad W_{\vec{R}}(A\to B)=0\ \text{ car } \vec{R}\perp au\ déplacement\ .$$

Donc d'après (1) $\frac{1}{2}mV_B^2=mhg$ d'où $\boxed{V_B=\sqrt{2gh}}$

b) *On applique le théorème de l'énergie cinétique au chariot entre le point A et le point M soit :*

$$\boldsymbol{E_C(M)-E_C(A)=W_{\vec{P}}(A\to M)+W_{\vec{R}}(A\to M)}\quad(1')$$

$$E_C(M)=\frac{1}{2}mV_M^2\ ;\ E_C(A)=\frac{1}{2}mV_A^2=0\ ;$$

$$W_{\vec{P}}(A\to M)=E_p(A)-E_p(M)=mgh-mga(1+\sin\theta)\ ;\ W_{\vec{R}}(A\to M)=0$$

Donc d'après (1') $\frac{1}{2}mV_M^2=mgh-mga(1+\sin\theta)$ d'où $\boxed{V_M=\sqrt{2gh-2ga(1+\sin\theta)}}$.

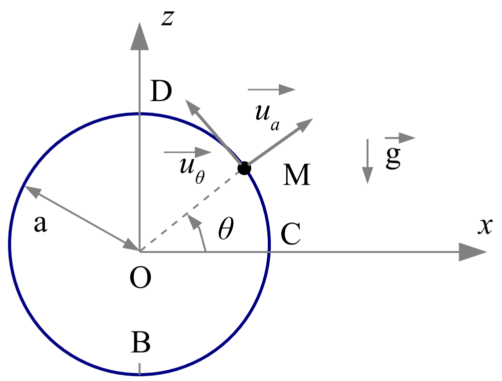
2. a) Pour pouvoir exprimer la réaction il faut appliquer la 2ème loi de Newton au point matériel dans la partie circulaire du mouvement.

Repère d'espace : $R(O,\vec{u}_x,\vec{u}_z)$

Base de projection la mieux adaptée : $(\vec{u}_a,\vec{u}_\theta)$,

Vecteurs cinématiques :

$$\overrightarrow{OM}=a\vec{u}_a\ ,\quad \vec{v}=a\dot{\theta}\vec{u}_\theta\ \text{ et }\ \vec{a}=-a\dot{\theta}^2\vec{u}_a+a\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$$



Bilan des forces :

Poids : $\vec{P}=-mg\sin\theta\vec{u}_a-mg\cos\theta\vec{u}_\theta$

Réaction du support : $\vec{R}=-R\vec{u}_a$

2ème loi d Newton : $m\vec{a}=\vec{P}+\vec{R}$ d'où par projection suivant $\vec{u}_a$:

$-am\dot{\theta}^2=-mg\sin\theta-R$ soit $R=am\dot{\theta}^2-mg\sin\theta$ or $V_M=a\dot{\theta}$ d'où $R=m\frac{V_M^2}{a}-mg\sin\theta$ en remplaçant V_M obtenu dans la question 13 on obtient : $R=m\frac{2gh-2ga(1+\sin\theta)}{a}-mg\sin\theta$ d'où

$$\boxed{R=mg\left(\frac{2h}{a}-2-3\sin\theta\right)}$$

b) R est minimale quand $\sin\theta$ est maximum c'est à dire en D.

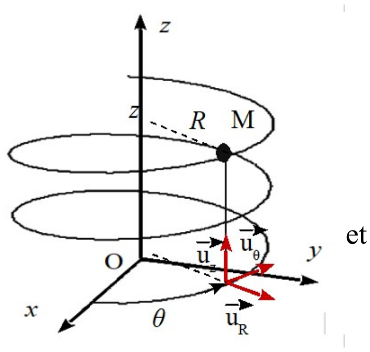
c) Pour que le chariot ne quitte pas le contact des rails il faut que R (D) > 0 , on en déduit $\boxed{h_{min}=\frac{5}{2}a}$.

Application numérique : $\boxed{h_{min}=11{,}75\ m}$

d) On veut que $R(D)\geq\frac{mg}{4}$ d'où $mg\left(\frac{2h}{a}-2-3\sin\frac{\pi}{2}\right)\geq\frac{mg}{4}$ d'où $\frac{2h}{a}-5\geq\frac{1}{4}$ d'où $\frac{2h}{a}\geq\frac{21}{4}$ d'où

$\boxed{h_{min}=\frac{21}{8}a=12{,}34\ m}$.

6. Toboggan hélicoïdal



1. On utilise la relation $z=\alpha\theta$. On sait que pour $z=h=4\text{m}$ et $\theta=2\pi n=4{,}6\pi$ d'où : $\boxed{\alpha=\frac{z}{\theta}=\frac{4}{4{,}6\pi}=0{,}28\,m.rad^{-1}}$.

2. Ci-contre

3. On applique ce théorème de l'énergie mécanique à Paul entre le point de départ D et le point d'arrivée S : $E_m(S)-E_m(D)=W_{\vec{F}_{NC}}(D\rightarrow S)$

Au cours du mouvement, Paul est soumis à son poids dérivant de l'énergie potentielle : $E_p=mgz$ en supposant l'énergie potentielle nulle en z=0.

Il est également soumis à la réaction $\vec{R}$ du support orthogonale au déplacement, cette force ne travaille pas.

On déduit de ce bilan que $E_m(S)-E_m(D)=W_{\vec{F}_{NC}}(D\rightarrow S)=0$ (1)

$E_m(D)=E_p(D)+E_c(D)=mgh+\frac{1}{2}mv_D^2=mgh$; $E_m(S)=E_p(S)+E_c(S)=0+\frac{1}{2}mv_S^2$. De (1), on déduit que :

$$\boxed{v_S=\sqrt{2gh}=\sqrt{4\times4\times10}=8{,}9\,m.s^{-1}}$$

4. 1) En coordonnées cylindriques, $\overrightarrow{OM}=R\vec{u}_r+z\vec{u}_z$ d'où $\vec{v}=R\dot{\theta}\vec{u}_\theta+\dot{z}\vec{u}_z$ or $z=\alpha\theta$ d'où $\dot{\theta}=\frac{\dot{z}}{\alpha}$ d'où :

$$\boxed{\vec{v}=R\frac{\dot{z}}{\alpha}\vec{u}_\theta+\dot{z}\vec{u}_z}.$$

2) D'après le théorème de la puissance cinétique : $\frac{dE_c}{dt}=\vec{P}.\vec{v}+\vec{R}.\vec{v}$ (2).

$E_c=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m[(R\frac{\dot{z}}{\alpha})^2+\dot{z}^2]$ donc $\frac{dE_c}{dt}=\frac{1}{2}m[R^2 2\dot{z}\frac{\ddot{z}}{\alpha^2}+2\dot{z}\ddot{z}]=m\dot{z}\ddot{z}[\frac{R^2}{\alpha^2}+1]$

$\vec{P}.\vec{v}=-mg\vec{u}_z.(R\frac{\dot{z}}{\alpha}\vec{u}_\theta+\dot{z}\vec{u}_z)=-mg\dot{z}$ et $\vec{R}.\vec{v}=0$. De (2) on tire : $m\dot{z}\ddot{z}[\frac{R^2}{\alpha^2}+1]=-mg\dot{z}$ d'où l'équation différentielle du mouvement : $\boxed{\ddot{z}=\frac{-g}{[\frac{R^2}{\alpha^2}+1]}}$.

3) Par intégration on obtient : $\dot{z}=\frac{-g}{[\frac{R^2}{\alpha^2}+1]}t+cste$ or à t=0 $\dot{z}=0$ donc cste =0 d'où $\dot{z}=\frac{-g}{[\frac{R^2}{\alpha^2}+1]}t$. Par intégration on obtient : $z(t)=\frac{-g}{2[\frac{R^2}{\alpha^2}+1]}t^2+cste$. or à t=0 $z=h$ donc *cste =h d'où* $z(t)=\frac{-g}{2[\frac{R^2}{\alpha^2}+1]}t^2+h$.

La durée de descente est T_d telle que $z(T_d)=0$ soit $0=\frac{-g}{2[\frac{R^2}{\alpha^2}+1]}T_d^2+h$ d'où $T_d=\sqrt{2[\frac{R^2}{\alpha^2}+1]\frac{h}{g}}$.

$$\boxed{T_f=T_d+5=\sqrt{2[\frac{R^2}{\alpha^2}+1]\frac{h}{g}}+5=\sqrt{2[\frac{2^2}{0{,}28^2}+1]\frac{4}{10}}+5=11{,}5\,s}.$$