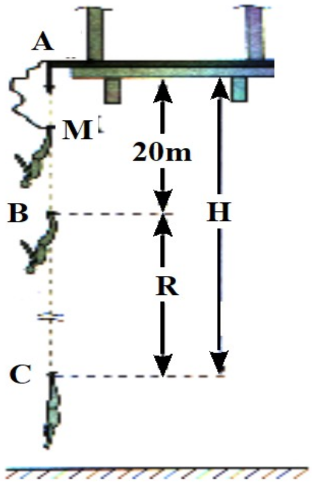
2. Saut à l'élastique

Un sauteur à l'élastique, modélisé par un point matériel *M*, de masse *m=70kg* tombe depuis un pont (en *A*) avec un élastique accroché aux pieds. Pendant les *20* premiers mètres de chute (jusqu'en *B*) l'élastique n'est d'aucune utilité le sauteur est donc en chute libre.
A partir du point B, l'action de l'élastique est modélisable par un ressort de masse négligeable, de longueur à vide $l_0=20m$ et de raideur $k=120N.m^{-1}$. On prend $g=9,81m.s^{-2}$
On néglige tout frottement.
1. Déterminer la vitesse du sauteur en *B*.
2. Déterminer la hauteur totale de chute *H*.
3. Déterminer l'amplitude des oscillations effectuées par le sauteur après son passage en *C*. Commenter le résultat .
Rep: $v_B=71,3km.h^{-1}$; $H=41,9m$; $A = 16,2m$



Solution :

1. Ref : terrestre, système : le sauteur
On applique le théorème de l'énergie cinétique au sauteur entre les points *A* et *B* :
$\boxed{E_C(B)-E_C(A)=W_{\vec{P}}(A\rightarrow B)}$ (1)

$E_C(B)-E_C(A)=\frac{1}{2}mv_B^2-0=\frac{1}{2}mv_B^2$ et $W_{\vec{P}}=mgh$ donc d'après (1) $\boxed{v_B=\sqrt{2gh}}$

Application numérique : $\boxed{v_B=\sqrt{2\times 9,81\times 20}=19,8\,ms^{-1}=71,3\,km.h^{-1}}$

2. On applique le théorème de l'énergie cinétique au sauteur entre les points *A* et *C* :
$\boxed{E_C(C)-E_C(A)=W_{\vec{P}}(A\rightarrow C)+W_{\vec{T}}(B\rightarrow C)}$ (2)

$E_C(C)-E_C(A)=0$; $W_{\vec{P}}(A\rightarrow C)=mgH$; $W_{\vec{T}}(B\rightarrow C)=E_{Pe}(B)-E_{Pe}(C)$

$W_{\vec{T}}(B\rightarrow C)=0-\frac{1}{2}k(H-l_0)^2$ donc d'après (2) on en déduit : $mgH=\frac{1}{2}k(H-l_0)^2$ d'où l'équation du 2nd degré : $\frac{2mg}{k}H=H^2-2l_0H+l_0^2$ d'où $\boxed{H^2-(2l_0+\frac{2mg}{k})H+l_0^2=0}$

Application numérique : $H^2-(2\times 20+\frac{2\times 70\times 9,81}{120})H+20^2=0$ d'où $H^2-51,445H+400=0$

$\Delta=51,445^2-4\times 400=1046,588=32,35^2$ d'où $H_1=\frac{51,445-32,35}{2}=9,54\,m$ impossible car < l_0

$\boxed{H_2=\frac{51,445+32,35}{2}=41,9\,m}$ solution acceptable.

3. On détermine la position d'équilibre du sauteur grâce à la 2ème loi de Newton (cours). $L_{eq}=l_0+\frac{mg}{k}$

AN : $L_{eq}=20+20+\frac{70\times 9,81}{120}=25,7\,m$

L'amplitude des oscillations est $\boxed{A=H-L_{eq}=41,9-25,7=16,2\,m}$ s'il n'y a pas de frottements. L'amplitude des oscillations diminue rapidement dans la pratique !

3. Pendule : mesure d'une vitesse

On accroche une bille de masse m=200g au bout d'un fil inextensible de masse négligeable et de longueur L=1m. On repère la position de la bille grâce à l'angle θ que fait le fil avec la verticale descendante. On lâche la bille avec une vitesse nulle le fil faisant un angle $\theta_0=30°$ avec la verticale descendante .

On suppose le fil tendu à tout moment.

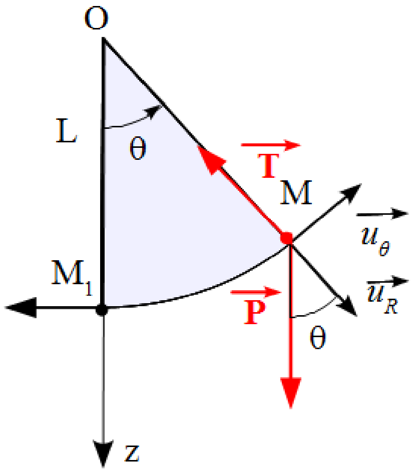
1. Faire un schéma du dispositif en précisant les différents paramètres.

2. Montrer que le système est conservatif.

3. Établir l'expression de l'énergie mécanique E_m de la bille au cours de son mouvement en fonction de *v, m, L, g et θ.* En déduire l'expression de sa vitesse *v* en fonction de *m, L, g et θ.* Calculer la vitesse v_1 de la bille lors de son passage par la position verticale du fil.

4. De l'expression de E_m déduire l'équation différentielle du mouvement de la bille vérifiée par θ. La résoudre en faisant l'hypothèse des petits angles. En déduire la vitesse v_1' de la bille lors de son passage par la position verticale du fil en fonction de *L, g et θ₀*. Faire l'application numérique et conclure.

Solution :



1. Voir ci-contre.

2. On montre que le système est conservatif en faisant le bilan des forces :

La bille est soumis à son poids qui est une force conservative, et la tension du fil qui ne travaille pas. Conclusion : le système est conservatif $E_m=E_C+E_P=cste$.

3. L'énergie cinétique est : $E_C=\frac{1}{2}mv^2$

L' énergies potentielles est : $E_P=-mgz+K=-mglcos\theta+mgl$ en prenant l'origine en M_1.

D'où l'expression de la conservation de l'énergie mécanique: $Em=\frac{1}{2}mv^2-mgLcos\theta+mgL$.

$Em=Em(t=0)=\frac{1}{2}m0^2-mgLcos(30°)+mgL=mgL(1-\frac{\sqrt{3}}{2})$ d'où $mgL(1-\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{1}{2}mv^2-mgLcos\theta+mgL$

d'où $v=\sqrt{2gL(\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{2})}$

AN : $v_1=\sqrt{2\times9,81\times1(cos0-\frac{\sqrt{3}}{2})}$ d'où $v_1=1,62\ m.s^{-1}$

4. $\vec{v}=L\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ d'où $Em=\frac{1}{2}m(L\dot{\theta})^2-mgLcos\theta+mgL$. On obtient l'équation du mouvement en dérivant l'expression de E_m : $\frac{dE_m}{dt}=0=\frac{1}{2}m\times2(L^2\dot{\theta})\ddot{\theta}+\dot{\theta}mgL\sin\theta$ d'où $\boxed{L\ddot{\theta}+g\sin\theta=0}$.

Dans le cadre des petits angles $\sin\theta=\theta$. L'équation devient : $\boxed{\ddot{\theta}+\omega^2\theta=0}$ avec $\omega=\sqrt{\frac{g}{L}}$. La solution est du type :

$\theta=A\cos\omega t+B\sin\omega t$. A t = 0 $\theta(0)=\theta_0$ d'où $A=\theta_0$. A t = 0 $v(0)=0$ d'où $B=0$ d'où $\boxed{\theta=\theta_0\cos\omega t}$ et $\boxed{v=L\dot{\theta}=-L\omega\theta_0\sin\omega t=-\sqrt{Lg}\theta_0\sin\omega t}$. Lorsque le fil est en position verticale $\theta=0$ donc $\cos\omega t=0$ d'où $\sin\omega t=\pm1$ d'où $\boxed{v_1'=\sqrt{Lg}\theta_0}$. AN : $\boxed{v_1'=\frac{\sqrt{1\times9,81}\times\pi}{6}=1,63\ m.s^{-1}}$

<u>Conclusion :</u> avec ou sans approximation on trouve le même résultat à moins de 1% près.

3. Voiture effectuant un looping

Une voiture de manège de masse m=24kg est assimilée à un point matériel. Cette voiture est posée sur deux rails parallèles et glisse sans frottement selon la trajectoire constituée en partie d'un cercle de rayon a=4,7m de la figure ci-dessous. On donne $g=9{,}81 m.s^{-2}$

La voiture est abandonnée sans vitesse au point A d'altitude h > a.

1. On suppose h est suffisamment grande pour que la voiture reste constamment en contact avec les rails.

a) Exprimer la vitesse V_B en B de la voiture en fonction de g et h.

b) Exprimer la vitesse V_M en M de la voiture en fonction de g, h, a et θ.

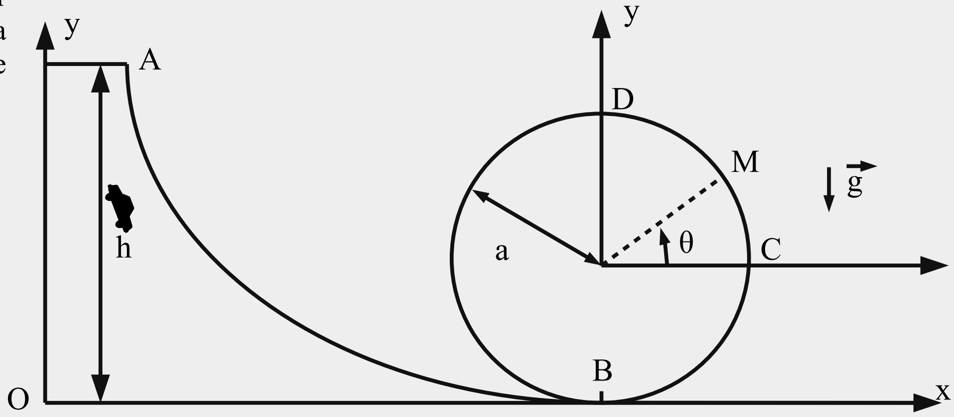
2. Soit $\vec{R}$ la réaction exercée par les rails sur la voiture.

a) Exprimer $\vec{R}$ en M en fonction de g, h, m, a et θ.

b) Pour quel point M_0 du cercle la norme de $\vec{R}$ est-elle minimale ?

c) Donner l'expression littérale puis calculer la hauteur h minimale pour laquelle la voiture ne décolle pas des rails.

d) Pour des raisons de sécurité, on veut qu'à chaque instant la voiture exerce sur les rails une force au moins égale au quart de son poids. Déterminer sous forme littérale puis calculer la hauteur minimale pour que cette condition soit remplie.



Solution :

1. *Ref : terrestre*

a) On applique le théorème de l'énergie cinétique au chariot entre le point A et le point B soit :

$$\boldsymbol{E_C(B)-E_C(A)=W_{\vec{P}}(A\rightarrow B)+W_{\vec{R}}(A\rightarrow B)} \quad (1)$$

$$E_C(B)=\frac{1}{2}mV_B^2 \ ; \ E_C(A)=\frac{1}{2}mV_A^2=0 \ ;$$

$$W_{\vec{P}}(A\rightarrow B)=E_p(A)-E_p(B)=mgh-0=mgh \ ; \quad W_{\vec{R}}(A\rightarrow B)=0 \text{ car } \vec{R}\perp au\ déplacement .$$

Donc d'après (1) $\frac{1}{2}mV_B^2=mhg$ d'où $\boxed{V_B=\sqrt{2gh}}$

b) *On applique le théorème de l'énergie cinétique au chariot entre le point A et le point M soit :*

$$\boldsymbol{E_C(M)-E_C(A)=W_{\vec{P}}(A\rightarrow M)+W_{\vec{R}}(A\rightarrow M)} \quad (1')$$

$$E_C(M)=\frac{1}{2}mV_M^2 \ ; \ E_C(A)=\frac{1}{2}mV_A^2=0 \ ;$$

$$W_{\vec{P}}(A\rightarrow M)=E_p(A)-E_p(M)=mgh-mga(1+\sin\theta) \ ; \ W_{\vec{R}}(A\rightarrow M)=0$$

Donc d'après (1') $\frac{1}{2}mV_M^2=mgh-mga(1+\sin\theta)$ d'où $\boxed{V_M=\sqrt{2gh-2ga(1+\sin\theta)}}$.

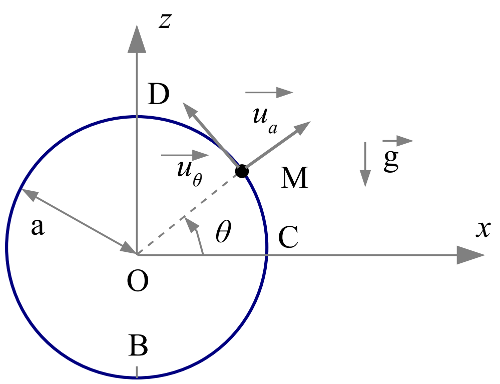
2. a) Pour pouvoir exprimer la réaction il faut appliquer la 2ème loi de Newton au point matériel dans la partie circulaire du mouvement.

Repère d'espace : $R(O,\vec{u}_x,\vec{u}_z)$

Base de projection la mieux adaptée : $(\vec{u}_a,\vec{u}_\theta)$,

Vecteurs cinématiques :

$$\boldsymbol{\overrightarrow{OM}}=a\boldsymbol{\vec{u}_a} \quad , \quad \boldsymbol{\vec{v}}=a\dot{\theta}\boldsymbol{\vec{u}_\theta} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\vec{a}}=-a\dot{\theta}^2\boldsymbol{\vec{u}_a}+a\ddot{\theta}\boldsymbol{\vec{u}_\theta}$$



Bilan des forces :

Poids : $\vec{P}=-mg\sin\theta\boldsymbol{\vec{u}_a}-mg\cos\theta\boldsymbol{\vec{u}_\theta}$

Réaction du support : $\vec{R}=-R\boldsymbol{\vec{u}_a}$

2ème loi d Newton : $m\vec{a}=\vec{P}+\vec{R}$ d'où par projection suivant $\boldsymbol{\vec{u}_a}$:

$-am\dot{\theta}^2=-mg\sin\theta-R$ soit $R=am\dot{\theta}^2-mg\sin\theta$ or $V_M=a\dot{\theta}$ d'où $R=m\frac{V_M^2}{a}-mg\sin\theta$ en remplaçant V_M obtenu dans la question 13 on obtient : $R=m\frac{2gh-2ga(1+\sin\theta)}{a}-mg\sin\theta$ d'où

$$\boxed{R=mg(\frac{2h}{a}-2-3\sin\theta)}$$

b) R est minimale quand $\sin\theta$ est maximum c'est à dire en D.

c) Pour que le chariot ne quitte pas le contact des rails il faut que R (D) > 0 , on en déduit $\boxed{h_{min}=\frac{5}{2}a}$.

Application numérique : $\boxed{h_{min}=11{,}75\,m}$

d) On veut que $R(D)\geq\frac{mg}{4}$ d'où $mg(\frac{2h}{a}-2-3\sin\frac{\pi}{2})\geq\frac{mg}{4}$ d'où $\frac{2h}{a}-5\geq\frac{1}{4}$ d'où $\frac{2h}{a}\geq\frac{21}{4}$ d'où

$$\boxed{h_{min}=\frac{21}{8}a=12{,}34\,m}$$.

6. Toboggan hélicoïdal

Paul est initialement immobile en haut du toboggan représenté figure 4 à l'altitude h.

Figure 4

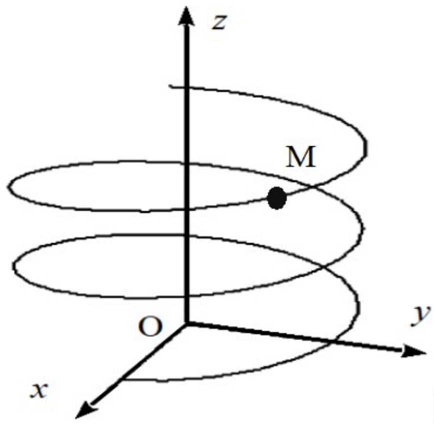


Figure 5

Ce toboggan est constitué d'un enroulement hélicoïdal d'approximativement n = 2,3 tours. Le rayon moyen est estimé à R= 2,0 m et la hauteur de l'ensemble est h= 4,0 m .

On modélise la piste du toboggan par une hélice circulaire représentée figure 5.

Dans le repère d'espace $R(O,\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$ où O est au niveau du sol et l'axe Oz ascendant, l'équation de la courbe décrivant l'enroulement est en coordonnées cylindriques : r = R et z =α θ avec θ > 0 et exprimé en radian.

1. Déterminer la valeur de α.

2. On repère la position de Paul grâce à ses coordonnées cylindriques (R , θ , z) . Reproduire la figure 5 et représenter les coordonnées cylindriques du point M ainsi que la base associée.

3. Paul part du point D en haut du toboggan sans vitesse initiale. En utilisant le théorème de l'énergie mécanique, exprimer, puis calculer la norme de la vitesse atteinte v_s par l'enfant en sortie au point S du toboggan.

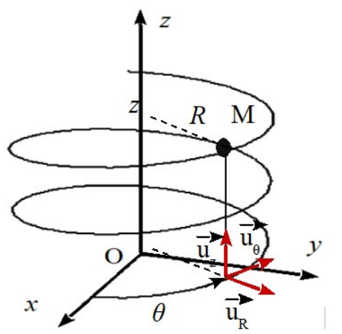
4. Afin d'éviter d'éventuelles collisions, le toboggan est équipé au point de départ d'un feu qui passe au vert toutes les T_f secondes. On impose une marge de T_m= 5s en plus de la durée de parcours dans le toboggan.

4.1. Exprimer la vitesse $\vec{v}$ de l'enfant dans la base cylindrique en fonction de R, $\dot{z}$ et α.

4.2. En utilisant le théorème de la puissance cinétique, établir l'équation différentielle en z du mouvement de Paul en fonction de g, α et R.

4.3. En déduire l'expression et la valeur numérique de T_f.

Solution:



1. On utilise la relation $z=\alpha\theta$. On sait que pour $z=h=4\text{m}$ et $\theta=2\pi n=4{,}6\pi$ d'où : $\boxed{\alpha=\frac{z}{\theta}=\frac{4}{4{,}6\pi}=0{,}28\,m.rad^{-1}}$.

2. Ci-contre

3. On applique ce théorème de l'énergie mécanique à Paul entre le point de départ D et le point d'arrivée S : $E_m(S)-E_m(D)=W_{\vec{F}_{NC}}(D\rightarrow S)$

Au cours du mouvement, Paul est soumis à son poids dérivant de l'énergie potentielle : $E_p=mgz$ en supposant l'énergie potentielle nulle en z=0.

Il est également soumis à la réaction $\vec{R}$ du support orthogonale au déplacement, cette force ne travaille pas.

On déduit de ce bilan que $E_m(S)-E_m(D)=W_{\vec{F}_{NC}}(D\rightarrow S)=0$ (1)

$E_m(D)=E_p(D)+E_c(D)=mgh+\frac{1}{2}mv_D^2=mgh$; $E_m(S)=E_p(S)+E_c(S)=0+\frac{1}{2}mv_S^2$. De (1), on déduit que :

$$\boxed{v_S=\sqrt{2gh}=\sqrt{4\times4\times10}=8{,}9\,m.s^{-1}}$$

4. 1) En coordonnées cylindriques, $\overrightarrow{OM}=R\vec{u}_r+z\vec{u}_z$ d'où $\vec{v}=R\dot{\theta}\vec{u}_\theta+\dot{z}\vec{u}_z$ or $z=\alpha\theta$ d'où $\dot{\theta}=\frac{\dot{z}}{\alpha}$ d'où :

$$\boxed{\vec{v}=R\frac{\dot{z}}{\alpha}\vec{u}_\theta+\dot{z}\vec{u}_z}.$$

2) D'après le théorème de la puissance cinétique : $\frac{dE_c}{dt}=\vec{P}.\vec{v}+\vec{R}.\vec{v}$ (2).

$E_c=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m[(R\frac{\dot{z}}{\alpha})^2+\dot{z}^2]$ donc $\frac{dE_c}{dt}=\frac{1}{2}m[R^2 2\dot{z}\frac{\ddot{z}}{\alpha^2}+2\dot{z}\ddot{z}]=m\dot{z}\ddot{z}[\frac{R^2}{\alpha^2}+1]$

$\vec{P}.\vec{v}=-mg\vec{u}_z.(R\frac{\dot{z}}{\alpha}\vec{\boldsymbol{u}}_\theta+\dot{z}\vec{\boldsymbol{u}}_z)=-mg\dot{z}$ et $\vec{R}.\vec{v}=0$. De (2) on tire : $m\dot{z}\ddot{z}[\frac{R^2}{\alpha^2}+1]=-mg\dot{z}$ d'où l'équation différentielle du mouvement : $\boxed{\ddot{z}=\frac{-g}{[\frac{R^2}{\alpha^2}+1]}}$.

3) Par intégration on obtient : $\dot{z}=\frac{-g}{[\frac{R^2}{\alpha^2}+1]}t+cste$ or à t=0 $\dot{z}=0$ donc cste =0 d'où $\dot{z}=\frac{-g}{[\frac{R^2}{\alpha^2}+1]}t$. Par intégration on obtient : $z(t)=\frac{-g}{2[\frac{R^2}{\alpha^2}+1]}t^2+cste$. or à t=0 $z=h$ donc *cste =h d'où* $z(t)=\frac{-g}{2[\frac{R^2}{\alpha^2}+1]}t^2+h$.

La durée de descente est T_d telle que $z(T_d)=0$ soit $0=\frac{-g}{2[\frac{R^2}{\alpha^2}+1]}T_d^2+h$ d'où $T_d=\sqrt{2[\frac{R^2}{\alpha^2}+1]\frac{h}{g}}$.

$\boxed{T_f=T_d+5=\sqrt{2[\frac{R^2}{\alpha^2}+1]\frac{h}{g}}+5=\sqrt{2[\frac{2^2}{0{,}28^2}+1]\frac{4}{10}}+5=11{,}5\,s}$.