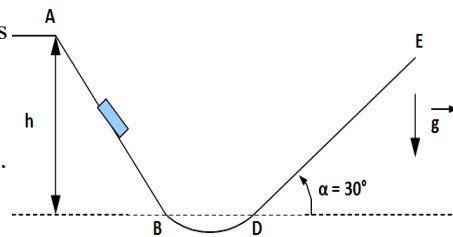


# Approche énergétique du mouvement d'un point matériel

## 1. Montagnes russes ☺☺

Un chariot de masse  $m=40\text{kg}$  est solidaire d'une piste  $P$  représentée ci-contre. Les parties  $AB$  et  $DE$  sont rectilignes, la partie  $BD$  est un arc de cercle. Le chariot glisse sans frottement sur les parties  $AB$  et  $BD$ . On prendra  $g=10\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ .



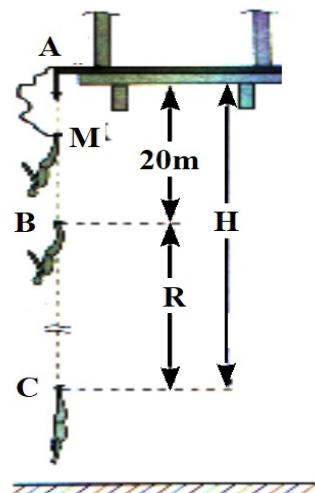
1) Le chariot est lâché en A sans vitesse initiale à une hauteur  $h = 10\text{m}$  par rapport à B ou D. On considère dans un premier temps qu'il n'y a pas de frottements sur la partie DE. Déterminer la hauteur  $h_1$  atteinte par le chariot sur DE.

2) Sur DE le chariot est soumis à une force de frottement constante de norme  $f$ . La hauteur atteinte par le chariot est cette fois-ci  $h_2 = 8\text{m}$ . Déterminer  $f$  par application du théorème de l'énergie cinétique.

Rep:  $f = \frac{\sin \alpha}{h_2} (mg(h-h_2))$

## 2. Saut à l'élastique ☺☺

Un sauteur à l'élastique, modélisé par un point matériel  $M$ , de masse  $m=70\text{kg}$  tombe depuis un pont (en A) avec un élastique accroché aux pieds. Pendant les 20 premiers mètres de chute (jusqu'en B) l'élastique n'est d'aucune utilité le sauteur est donc en chute libre.



A partir du point B, l'action de l'élastique est modélisable par un ressort de masse négligeable, de longueur à vide  $l_0=20\text{m}$  et de raideur  $k=120\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$ . On prend  $g=9,81\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

On néglige tout frottement.

1. Déterminer la vitesse du sauteur en B.

2. Déterminer la hauteur totale de chute  $H$ .

3. Déterminer l'amplitude des oscillations effectuées par le sauteur après son passage en C. Commenter le résultat.

Rep:  $v_B = 71,3\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ ;  $H = 41,9\text{m}$ ;  $A = 16,2\text{m}$

## 3. Pendule : mesure d'une vitesse ☺☺

On accroche une bille de masse  $m=200\text{g}$  au bout d'un fil inextensible de masse négligeable et de longueur  $L=1\text{m}$ . On repère la position de la bille grâce à l'angle  $\theta$  que fait le fil avec la verticale descendante. On lâche la bille avec une vitesse nulle le fil faisant un angle  $\theta_0=30^\circ$  avec la verticale descendante.

On suppose le fil tendu à tout moment.

1. Faire un schéma du dispositif en précisant les différents paramètres.

2. Montrer que le système est conservatif.

3. Établir l'expression de l'énergie mécanique  $E_m$  de la bille au cours de son mouvement en fonction de  $v$ ,  $m$ ,  $L$ ,  $g$  et  $\theta$ . En déduire l'expression de sa vitesse  $v$  en fonction de  $m$ ,  $L$ ,  $g$  et  $\theta$ . Calculer la vitesse  $v_1$  de la bille lors de son passage par la position verticale du fil.

4. De l'expression de  $E_m$  déduire l'équation différentielle du mouvement de la bille vérifiée par  $\theta$ . La résoudre en faisant l'hypothèse des petits angles. En déduire la vitesse  $v_1$  de la bille lors de son passage par la position verticale du fil en fonction de  $L$ ,  $g$  et  $\theta_0$ . Faire l'application numérique et conclure.

Rep: 3)  $v = \sqrt{2gL(\cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{2})}$ ; 4)  $v = -\sqrt{Lg\theta_0} \sin \omega t$

## 4. Étude d'un looping ☺☺☺

Une voiture de manège de masse  $m=24\text{kg}$  est assimilée à un point matériel. Cette voiture est posée sur deux rails parallèles et glisse sans frottement selon la trajectoire constituée en partie d'un cercle de rayon  $a=4,7\text{m}$  de la figure ci-dessous. On donne  $g=9,81\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

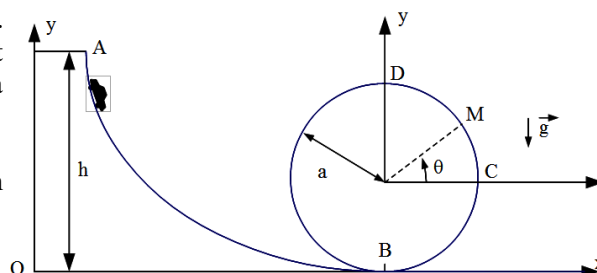
La voiture est abandonnée sans vitesse au point A d'altitude  $h > a$ .

1.  $h$  est suffisamment grande pour que la voiture reste constamment en contact avec les rails.

a) Exprimer la vitesse  $V_B$  en B de la voiture en fonction de  $g$  et  $h$ .

b) Exprimer la vitesse  $V_M$  en M de la voiture en fonction de  $g$ ,  $h$ ,  $a$  et  $\theta$ .

2. Soit  $\vec{R}$  la réaction exercée par les rails sur la voiture.



- a) Exprimer  $\vec{R}$  en M en fonction de g, h, m, a et  $\theta$ .  
 b) Pour quel point  $M_0$  du cercle la norme de  $\vec{R}$  est-elle minimale ?  
 c) Donner l'expression littérale puis calculer la hauteur h minimale pour laquelle la voiture ne décolle pas des rails.  
 d) Pour des raisons de sécurité, on veut qu'à chaque instant la voiture exerce sur les rails une force au moins égale au quart de son poids. Déterminer sous forme littérale puis calculer la hauteur minimale pour que cette condition soit remplie.  
 Rep: 1b)  $V_M = (2gh - 2ga(1 + \sin\theta))^{1/2}$ ; 2a)  $R = mg(2h/a - 2 - 3\sin\theta)$ ; 2c)  $h_{\min} = 11,75\text{ m}$ ; 2d)  $h'_{\min} = 12,34\text{ m}$

## 5. Bille dans un potentiel semi-élastique : effet non linéaire ☺☺

Un point matériel de masse m est mobile sans frottement sur un axe horizontal Ox. A  $t=0$ , il est en O et sa vitesse est  $\vec{V}(0) = V_0 \vec{u}_x$ . Il est alors soumis à des forces conservatives dérivant de l'énergie potentielle :

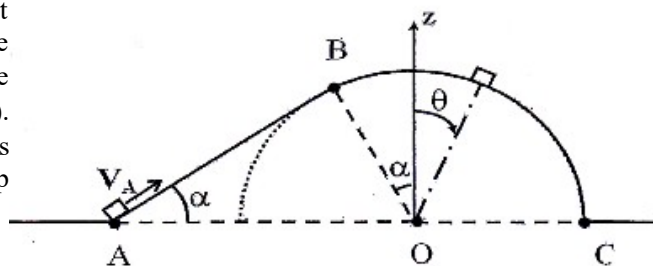
$$U(x) = \frac{1}{2} k x^2 - \frac{1}{3} k s x^3 \text{ où } k \text{ et } s \text{ sont des constantes positives.}$$

- Déterminer les positions d'équilibre de M et conclure quant à leur stabilité.
- Tracer l'allure de U(x). Préciser les coordonnées des extrêmes relatifs.
- A l'aide de l'intégrale première de l'énergie déterminer l'équation du mouvement.
- Déterminer la résultantes des forces horizontales exercées sur la particule. Retrouver l'équation du mouvement. On posera  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$
- Dans le cas d'un mouvement de faible amplitude ( $x \ll 1/s$ ), déterminer x(t).
- On suppose maintenant que le système possède une énergie mécanique  $E_m$  telle que:  $0 < E_m < \frac{k}{6s^2}$  dans quel domaine de l'axe Ox peut se déplacer la particule ? On distinguera plusieurs cas .  
 Rep: 1)  $x_{e1} = 0, x_{e2} = 1/s$ ; 3)  $m \ddot{x} + kx - k s x^2 = 0$  ;

## 6. Mouvement d'un palet (ENAC 2011) ☺☺☺

Choisir en justifiant l'une des réponses proposées . Toutes les questions sont liées

1. Un palet M de masse  $m = 5,0\text{ kg}$ , assimilé à un point matériel, est lancé sur une piste composée d'une portion rectiligne AB et inclinée d'un angle  $\alpha = 30^\circ$  par rapport à l'horizontale, et d'une portion circulaire BC, de rayon  $R = 2\text{ m}$  et d'angle  $B\hat{O}C = \pi/2 + \alpha$  (cf figure ci-dessous). Le palet initialement lancé depuis A avec la vitesse  $V_A$  glisse sans frottement sur la piste. On désigne par  $g = 10\text{ m.s}^{-2}$  l'intensité du champ de pesanteur.



Déterminer la vitesse  $V_B$  au point B en supposant que ce point est atteint.

- A)  $V_B = (V_A^2 - 2gR \cos \alpha)^{1/2}$       C)  $V_B = V_A - \frac{gR \cos \alpha}{V_A}$   
 B)  $V_B = (V_A^2 + gR \sin \alpha)^{1/2}$       D)  $V_B = V_A - \frac{gR \tan \alpha}{V_A}$
2. Afin que B soit effectivement atteint par le palet, il est nécessaire que  $V_A > V_{A1}$ . Evaluer  $V_{A1}$ .
- A)  $V_{A1} \approx 0,1\text{ m.s}^{-1}$       B)  $V_{A1} \approx 1\text{ m.s}^{-1}$       C)  $V_{A1} \approx 6\text{ m.s}^{-1}$       D)  $V_{A1} \approx 30\text{ m.s}^{-1}$

Pour les questions suivantes on suppose la condition précédente vérifiée.

3. Calculer la durée  $\tau$  de parcours de la portion AB.
- A)  $\tau = \frac{V_A - (V_A^2 - 2gR \cos \alpha)^{1/2}}{g \sin \alpha}$       C)  $\tau = \frac{V_A - (2gR \sin \alpha)^{1/2}}{g \cos \alpha}$   
 B)  $\tau = \frac{(V_A^2 - 3gR \cos \alpha)^{1/2}}{g \sin \alpha}$       D)  $\tau = \frac{V_A + (V_A^2 + 2gR \sin \alpha)^{1/2}}{g \cos \alpha}$
4. Déterminer l'expression de la réaction normale  $R_N$  du support sur M lors de la phase du mouvement sur l'arc BC en fonction de  $\theta$  qui est l'angle entre  $OM$  et la verticale.
- A)  $R_N = mg \cos \theta$       C)  $R_N = m(g \cos \theta - R \dot{\theta}^2)$   
 B)  $R_N = m(g \sin \theta + R \ddot{\theta})$       D)  $R_N = mg \sin \theta$
5. A quelle condition sur  $V_A$  n'y aura-t-il pas de décollage avant le sommet ?
- A)  $V_A < (3Rg \cos \alpha)^{1/2}$       B)  $V_A < (Rg \tan \alpha)^{1/2}$       C)  $V_A < (3Rg)^{1/2}$       D)  $V_A < (2Rg \sin \alpha)^{1/2}$
6. Déterminer la valeur  $\theta_d$  de  $\theta$  pour laquelle le palet quitte la piste.
- A)  $\theta_d = \arccos\left(\frac{2}{3}\right)$       B)  $\theta_d = \arccos\left(\frac{V_A R}{3gR}\right)$       C)  $\theta_d = \arcsin\left(\frac{V_A R}{2g}\right)$       D)  $\theta_d = \arcsin\left(\frac{2}{3}\right)$