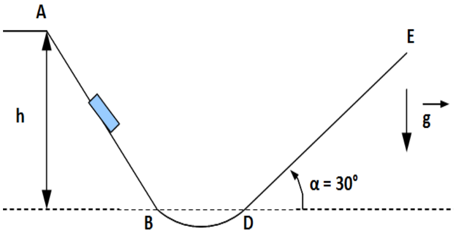
Approche énergétique du mouvement d'un point matériel

1. Montagnes russes ☺☺

Un chariot de masse m=40kg est solidaire d'une piste P représentée ci-contre. Les parties AB et DE sont rectilignes, la partie BD est un arc de cercle. Le chariot glisse sans frottement sur les parties AB et BD. On prendra g=10m.s^{-2}.



1) Le chariot est lâché en A sans vitesse initiale à une hauteur h = 10m par rapport à B ou D. On considère dans un premier temps qu'il n'y a pas de frottements sur la partie DE. Déterminer la hauteur h_1 atteinte par le chariot sur DE.

2) Sur DE le chariot est soumis à une force de frottement constante de norme f. La hauteur atteinte par le chariot est cette foi-ci h_2 = 8m. Déterminer f par application du théorème de l'énergie cinétique .

$Rep : f = \frac{\sin\alpha}{h_2}(mg(h-h_2))$

2. Flipper ☺☺

Le lanceur d'un flipper est constitué d'un ressort de raideur $k = 360\ N.m^{-1}$ et de longueur à vide $l_0 = 20\ cm$, incliné

Ce ressort est fixé à une extrémité d'une gouttière dans laquelle le ressort et la bille glissent sans frottement. On supposera que le contact entre le ressort et la bille est rompu si la bille est au delà de la longueur à vide du ressort. La gouttière de lancement est placée le long d'un plan incliné d'un angle $\alpha = 20,0\,°$ avec l'horizontale.

On donne l'accélération de la pesanteur $g = 9,8 m.s^{-2}$.

On appellera O le point d'attache du ressort et $\vec{u}_x$ le vecteur unitaire dirigé dans le sens de l'allongement du ressort. La position de la bille sera donc repérée par son abscisse x le long de cet axe.

1) Réaliser un schéma paramétré du dispositif.

2) Exprimer les différentes énergies potentielles en fonction de x et des données de l'énoncé. Pour l'énergie potentielle élastique, on précisera le domaine de variation de x pour lequel cette écriture est valable.

On choisira l'origine de l'énergie potentielle de pesanteur en $x = 0$ et celle de l'énergie potentielle élastique lorsque le ressort est à sa longueur à vide.

2) Le joueur comprime le ressort de $X_0 = 5,0\ cm$. Déterminer l'expression littérale de la vitesse v_{f1} avec laquelle la bille de masse $m = 100g$ est propulsée. On supposera que la bille est propulsée quand le ressort reprend sa longueur à vide. Faire l'application numérique.

3) La gouttière mesure L=1,2m à partir du point d'attache fixe du ressort. Déterminer la vitesse v_{f2} de la bille à la sortie de la gouttière. On donnera l'expression littérale puis l'expression numérique.

4) Quelle doit être la compression minimale du ressort pour que la bille entre dans le jeu ?

Rep 2): v_{f1} = 2,9 m.s^{-1}.

3. Pendule : mesure d'une vitesse ☺☺

On accroche une bille de masse m=200g au bout d'un fil inextensible de masse négligeable et de longueur L=1m. On repère la position de la bille grâce à l'angle θ que fait le fil avec la verticale descendante. On lâche la bille avec une vitesse nulle le fil faisant un angle $\theta_0 = 30\,°$ avec la verticale descendante .

On suppose le fil tendu à tout moment.

1. Faire un schéma du dispositif en précisant les différents paramètres.

2. Montrer que le système est conservatif.

3. Établir l'expression de l'énergie mécanique E_m de la bille au cours de son mouvement en fonction de *v, m, L, g et θ.* En déduire l'expression de sa vitesse *v* en fonction de *m, L, g et θ.* Calculer la vitesse v_1 de la bille lors de son passage par la position verticale du fil.

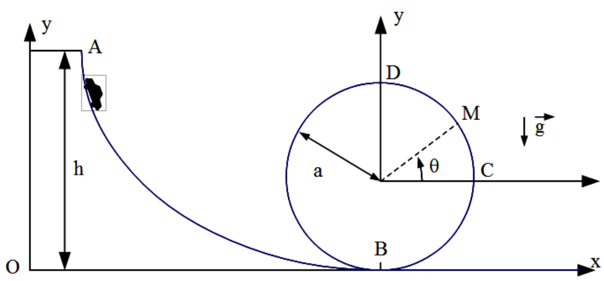
4. De l'expression de E_m déduire l'équation différentielle du mouvement de la bille vérifiée par θ. La résoudre en faisant l'hypothèse des petits angles. En déduire la vitesse v_1' de la bille lors de son passage par la position verticale du fil en fonction de *L, g et θ₀*. Faire l'application numérique et conclure.

Rep :3) $v = \sqrt{2gL\left(\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$; 4) $v = -\sqrt{Lg}\,\theta_0 \sin\omega t$

4. Étude d'un looping ☺☺☺

Une voiture de manège de masse m=24kg est assimilée à un point matériel. Cette voiture est posée sur deux rails parallèles et glisse sans frottement selon la trajectoire constituée en partie d'un cercle de rayon a=4,7m de la figure ci-dessous. On donne g=9,81m.s^{-2}

La voiture est abandonnée sans vitesse au point A d'altitude h > a.



1. h est suffisamment grande pour que la voiture reste constamment en contact avec les rails.

a) Exprimer la vitesse V_B en B de la voiture en fonction de g et h.

b) Exprimer la vitesse V_M en M de la voiture en fonction de g, h, a et θ.
2. Soit $\vec{R}$ la réaction exercée par les rails sur la voiture.
a) Exprimer $\vec{R}$ en M en fonction de g, h, m, a et θ.
b) Pour quel point M_0 du cercle la norme de $\vec{R}$ est-elle minimale ?
c) Donner l'expression littérale puis calculer la hauteur h minimale pour laquelle la voiture ne décolle pas des rails.
d) Pour des raisons de sécurité, on veut qu'à chaque instant la voiture exerce sur les rails une force au moins égale au quart de son poids. Déterminer sous forme littérale puis calculer la hauteur minimale pour que cette condition soit remplie.
Rep : *1b)* $V_M=(2gh-2ga(1+\sin\theta))^{1/2}$; *2a)* $R = mg(2h/a -2-3\sin\theta)$; *2c)* $h_{min}=11,75m$; *2d)* $h'_{min}=12,34\ m$

5. Bille dans un potentiel semi-élastique : effet non linéaire ☺☺

Un point matériel de masse m est mobile sans frottement sur un axe horizontal Ox. A t=0, il est en O et sa vitesse est $\vec{V}(0)=V_0\vec{u}_x$. Il est alors soumis à des forces conservatives dérivant de l'énergie potentielle :

$$U(x)=\frac{1}{2}k\,x^2-\frac{1}{3}k\,s\,x^3$$ où k et s sont des constantes positives.

1. Déterminer les positions d'équilibre de M et conclure quant à leur stabilité.
2. Tracer l'allure de U(x). Préciser les coordonnées des extrêmas relatifs.
3. A l'aide de l'intégrale première de l'énergie déterminer l'équation du mouvement.
4. Déterminer la résultantes des forces horizontales exercées sur la particule. Retrouver l'équation du mouvement. On posera $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$
5. Dans le cas d'un mouvement de faible amplitude (x<< 1/s), déterminer x(t).
6. On suppose maintenant que le système possède une énergie mécanique E_m telle que: $0 < E_m < \frac{k}{6s^2}$ dans quel domaine de l'axe Ox peut se déplacer la particule ? On distinguera plusieurs cas .
Rep:1) $x_{e1}=0$, $x_{e2}=1/s$; *3)* $m\ddot{x}+kx-k\,s\,x^2=0$;

6. Toboggan hélicoïdal ☺☺☺

Paul est initialement immobile en haut du toboggan représenté figure 4 à l'altitude h.

Figure 4

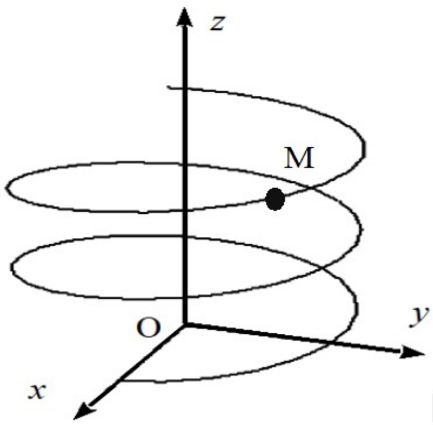


Figure 5

Ce toboggan est constitué d'un enroulement hélicoïdal d'approximativement n = 2,3 tours. Le rayon moyen est estimé à R= 2,0 m et la hauteur de l'ensemble est h= 4,0 m .

On modélise la piste du toboggan par une hélice circulaire représentée figure 5.

Dans le repère d'espace $R(O,\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$ où O est au niveau du sol et l'axe Oz ascendant, l'équation de la courbe décrivant l'enroulement est en coordonnées cylindriques : r = R et z =α θ avec θ > 0 et exprimé en radian.

1. Déterminer la valeur de α.

2. On repère la position de Paul grâce à ses coordonnées cylindriques (R , θ , z) . Reproduire la figure 5 et représenter les coordonnées cylindriques du point M ainsi que la base associée.

3. Paul part du point D en haut du toboggan sans vitesse initiale. En utilisant le théorème de l'énergie mécanique, exprimer, puis calculer la norme de la vitesse atteinte v_s par l'enfant en sortie au point S du toboggan.

4. Afin d'éviter d'éventuelles collisions, le toboggan est équipé au point de départ d'un feu qui passe au vert toutes les T_f secondes. On impose une marge de T_m= 5s en plus de la durée de parcours dans le toboggan.

4.1. Exprimer la vitesse $\vec{v}$ de l'enfant dans la base cylindrique en fonction de R, $\dot{z}$ et α.

4.2. En utilisant le théorème de la puissance cinétique, établir l'équation différentielle en z du mouvement de Paul en fonction de g, α et R.

4.3. En déduire l'expression et la valeur numérique de T_f.