Oscillateurs mécaniques

1. Oscillations dans un cristal ☺☺

Dans un cristal, un atome de masse 10^{-26} *kg* effectue des oscillations harmoniques autour de sa position d'équilibre. La fréquence est égale à $f_0 = 10^{12}\,Hz$ et l'amplitude à $X_m = 0{,}05\,nm$. Déterminer :

1. Le module de la vitesse maximale
2. Son énergie mécanique
3. Le module de son accélération maximale
4. La constante de rappel du ressort modélisant les oscillations.

2. Caractéristiques d'oscillations ☺☺

Un pendule élastique horizontal est formé d'un ressort de constante de raideur $k = 20{,}0\,N.m^{-1}$ et d'une masse m=200 g. A l'instant $t = 0$, la masse est écartée de $x_0 = 2{,}00\,cm$ de sa position d'équilibre avec la vitesse initiale $v_0 = 20{,}0\,cm.s^{-1}$.

1. Calculer la valeur de l'énergie mécanique totale de l'oscillateur à l'instant du lancement.
2. En déduire l'amplitude des oscillations ainsi que la vitesse de passage par la position d'équilibre.

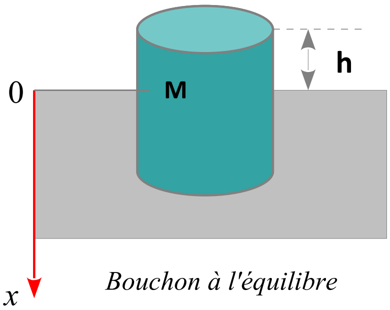
Réponses : (E_m = 8 mJ ; X_m = 2,83 cm ; v_{max} = 28,3 cm/s)

3. Oscillations d'un bouchon ☺☺

Un bouchon de forme cylindrique de masse volumique μ_1 flotte verticalement dans l'eau de masse volumique $\mu_2 > \mu_1$. On pose $\alpha = \mu_1/\mu_2$. Le cylindre a pour surface S et pour hauteur H.

1) Montrer que la hauteur h *(figure ci-contre)* du cylindre hors de l'eau à l'équilibre est : h = H (1- α).

2) A partir de la position d'équilibre , On enfonce le cylindre dans l'eau d'une hauteur *a* < h et on l'abandonne sans vitesse initiale. Le cylindre reste toujours vertical. Déterminer les forces qui s'exercent sur lui lorsqu'il est enfoncé d'une hauteur *x* par rapport à sa position d'équilibre et en déduire la loi de son mouvement *x(t)* .



Bouchon à l'équilibre

4. Oscillateur oblique ☺☺

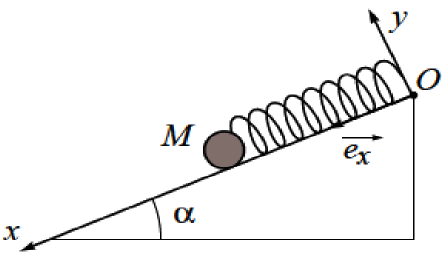
Soit un ressort de raideur k et de longueur `a vide l_0, dont les extrémités sont reliées à un point fixe O d'un plan incliné et

à un point matériel M de masse m.

On pose OM = x et on suppose qu'il n'existe pas de frottements de glissement sur le plan incliné.

1) Déterminer l'abscisse xe de la masse M à l'équilibre.

Rep: $le = l_0 + (mg\sin\alpha)/k$



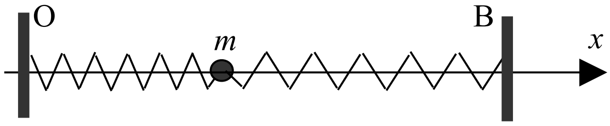
2) On tire la masse M d'une longueur X_0 par rapport à sa position d'équilibre et on la lâche sans vitesse initiale.

a. Établir l'équation différentielle du mouvement de la bille **par rapport à sa position d'équilibre.**
b. En déduire l'équation horaire du mouvement.
c. Déterminer l'expression de l'énergie potentielle Ep(t) ainsi que de l'énergie cinétique Ec(t) de la bille en fonction du temps.
d. Montrer qu'il y a conservation de l'énergie mécanique de la bille, et équipartition de l'énergie. Représenter Ec(t) et Ep(t).

5. Oscillateurs couplés ☺☺☺

Une masse m est fixée à deux ressorts de constantes de raideur k_1 et k_2 et glisse sans frottement sur un axe horizontal Ox. Les points d'attache des deux ressorts sont distants de la distance $d = OB$. l_{01} et l_{02} sont les longueurs à vide des ressorts.

On repère la position de la masse m grâce à son abscisse x sur l'axe Ox.



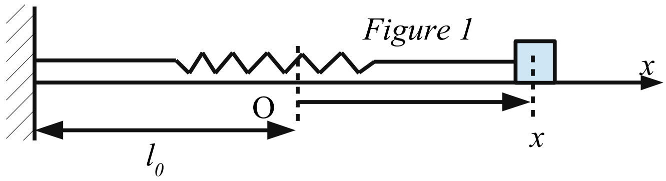
1. Exprimer littéralement la position x_e d'équilibre de la masse m. Faire l'application numérique *(rep : x_e=30cm)*.
2. On écarte la masse m de sa position d'équilibre, d'une distance a et on la lâche sans vitesse initiale. Etablir l'équation différentielle du mouvement vérifiée par $X(t) = x - x_e$ de la masse m. En déduire $X(t)$.
3. Retrouver l'équation précédente en utilisant l'intégrale première de l'énergie.

Application numérique :

OB=50cm ; k_1=5 SI ; l_{01}= 20 cm; k_2=10SI ; l_{02}=15cm ; m=150g

6. Influence de l'amortissement ☺☺

Une masse m = 5kg attachée à l'extrémité d'un ressort horizontal de raideur $k=80$ *SI* est en position d'équilibre. On tire cette masse de $x_0=3$cm et on la lâche sans vitesse initiale. On pose $x(t)$ l'allongement du ressort. Le dispositif est représenté *figure 1*.



1. Sachant que la masse est soumise à une force de frottement visqueux du type : $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$, déterminer l'équation différentielle du mouvement de la masse en $x(t)$.

2. Résoudre l'équation et déterminer l'équation horaire $x(t)$ du mouvement ainsi que le temps caractéristique τ de la durée du régime transitoire dans les trois cas suivants :

a) La force d'amortissement vaut 50 fois la vitesse. *Rep :* *x(t)=0,04exp(-2t)-0,01exp(-8t)*

b) La force d'amortissement vaut 20 fois la vitesse. *Rep :* *x(t)=exp(-2t)[003cos(3,46t)+0,017sin(3,46t)]*

c) Il n'y a pas de frottement. *Rep :* *x(t)=003cos(4t)*

3. Quelle valeur de λ correspond au régime critique ? Quelle est alors l'équation horaire x(t) du mouvement et la durée du régime transitoire ? *Rep :* *λ=40, x(t)=0,03(1+4t)exp(-4t)*

7. Vibrations d'un moteur ☺☺

Lorsqu'un moteur fonctionne, un balourd provoque des vibrations du châssis. Il est nécessaire de prévoir un système de suspension.

Le moteur étudié est assimilé à un point matériel de masse m. La suspension peut être modélisée par un ressort de longueur à vide l_0 et de raideur k, placé en parallèle avec un amortisseur qui exerce sur le moteur une force de freinage $\vec{f}=-\alpha\frac{dz}{dt}\vec{u_z}$ (Figure 8).

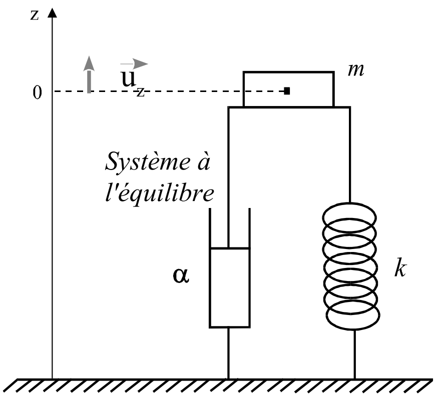


Figure 8

1. Le moteur ne fonctionne pas et il est immobile dans le référentiel d'étude supposé galiléen. Déterminer la longueur l_{eq} du ressort. La position du moteur dans ce cas sera prise dans la suite du problème comme origine de l'axe Oz.

2. Le moteur étant toujours arrêté, on l'écarte de sa position d'équilibre puis on le 1aisse évoluer librement.

2.1. Établir avec soin l'équation différentielle vérifiée par *z(t)* sous sa forme canonique. Identifier le facteur de qualité Q et la pulsation propre ω_0 .

2.2. On suppose $Q>\frac{1}{2}$. Donner la forme générale de la solution *z(t)* en fonction des paramètres Q et ω_0 . Comment appelle-t-on ce régime ?

3. Le moteur fonctionne, tout se passe alors comme s'il apparaissait une force supplémentaire de la forme :

$$\vec{F}=F_0\cos(\omega t)\vec{u_z}$$

3.1. Donner la nouvelle équation différentielle vérifiée par *z(t)*.

3.2. En régime sinusoïdal établi on recherche des solutions de la forme :
$z(t)=Z_0\cos(\omega t+\phi)$ et $v(t)=\dot{z}(t)=V_0\cos(\omega t+\psi)$. Établir l'expression de la grandeur complexe $\underline{V}=V_0e^{j\psi}$ en fonction de ω et des paramètres Q, ω_0 et $\frac{F_0}{m}$. En Déduire V_0 en fonction de ω et des paramètres Q, ω_0 et $\frac{F_0}{m}$. Tracer l'allure de $V_0(\omega)$.

3.3. Étudier et tracer $\psi(\omega)$

3.4. La pulsation ω vaut 628 rad.s^{-1}. Le moteur a une masse m = 10 kg et on dispose de deux ressorts de raideur k_1 = 4.10^6 N.m^{-1} et k_2 = 10^6 N.m^{-1}. Lequel faut-il choisir pour réaliser la suspension ?