Oscillateurs mécaniques

1. Oscillations dans un cristal ☺☺

Dans un cristal, un atome de masse 10^{-26} *kg* effectue des oscillations harmoniques autour de sa position d'équilibre. La fréquence est égale à $f_0 = 10^{12}\,Hz$ et l'amplitude à $X_m = 0{,}05\,nm$. Déterminer :

1. Le module de la vitesse maximale
2. Son énergie mécanique
3. Le module de son accélération maximale
4. La constante de rappel du ressort modélisant les oscillations.

2. Caractéristiques d'oscillations ☺☺

Un pendule élastique horizontal est formé d'un ressort de constante de raideur $k = 20{,}0\,N.m^{-1}$ et d'une masse m=200 g. A l'instant $t = 0$, la masse est écartée de $x_0 = 2{,}00\,cm$ de sa position d'équilibre avec la vitesse initiale $v_0 = 20{,}0\,cm.s^{-1}$.

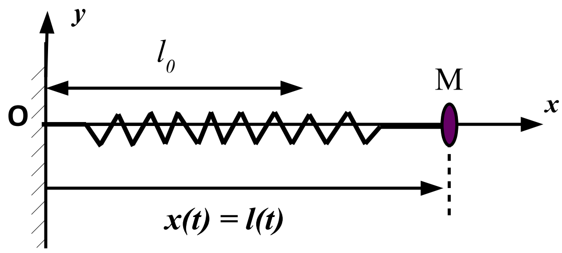
1. Calculer la valeur de l'énergie mécanique totale de l'oscillateur à l'instant du lancement.
2. En déduire l'amplitude des oscillations ainsi que la vitesse de passage par la position d'équilibre.

Réponses : (E_m = 8 mJ ; X_m = 2,83 cm ; v_{max} = 28,3 cm/s)

3. Oscillations d'une perle ☺☺

Première partie

Une perle de masse $m = 200\,g$ considérée comme ponctuelle peut coulisser sans frottement sur une tige horizontale. Cette perle est attachée à l'extrémité d'un ressort horizontal de masse négligeable, de constante de raideur $k = 12{,}0\,N.m^{-1}$ et le longueur à vide $l_0 = 30{,}0\,cm$ comme l'indique la figure ci-dessous. Le point d'attache du ressort noté *O* est fixe et sert d'origine à l'axe *Ox*.

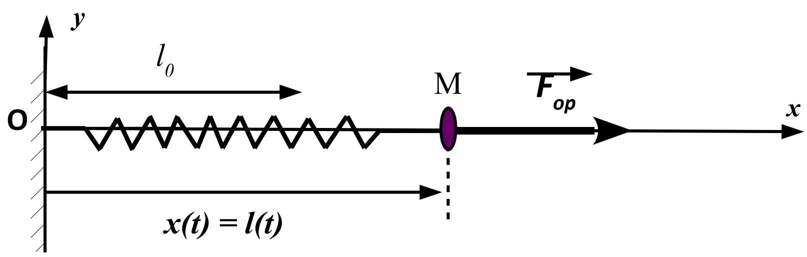


A t=0, on tire le ressort d'une quantité $X_0 = 12\,cm$ **par rapport à sa position d'équilibre** et on lâche la perle sans vitesse initiale.

1. Établir l'équation différentielle du mouvement de la perle vérifiée par son abscisse *x(t)* correspondant à la longueur du ressort . En déduire la pulsation propre ω_0 des oscillations puis résoudre l'équation.
2. Représenter *x(t)* sur 2 périodes. Préciser l'amplitude des oscillations et la valeur moyenne de *x(t)*.
3. Calculer l'énergie cinétique de la perle quand elle passe par sa position d'équilibre.

Deuxième partie

La perle est initialement au repos et on applique à partir d'un instant pris comme origine des temps une force $\vec{F}_{op} = F\,\vec{u}_x$ constante comme indiqué sur le schéma ci-dessous.



4. Établir l'équation différentielle du mouvement de la perle vérifiée par son abscisse *x(t)* correspondant toujours à la longueur du ressort . En déduire la pulsation propre ω_0 des oscillations puis résoudre l'équation et déterminer la bonne réponse parmi les propositions suivantes :

A) $x(t)=\frac{F}{k}(1-\cos(\omega_0 t))+l_0$ B) $x(t)=\frac{F}{k}\sin(\omega_0 t)+l_0$

C) $x(t)=\frac{F}{m}(1+\cos(\omega_0 t))+l_0$ D) $x(t)=\frac{F}{k}(\cos(\omega_0 t)-1)+l_0$

5. L'énergie mécanique de la perle au cours de son mouvement est définie comme la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle élastique. Etablir l'expression de l'énergie mécanique de la perle. Quelle est la bonne réponse parmi les propositions suivantes :

A) $E_m=\frac{1}{2}k l_0^2$ B) $E_m=\frac{F^2}{k}(1-\cos(\omega_0 t))$ C) $E_m=\frac{F^2}{m}\frac{t^2}{2}$ D) $E_m=\frac{kF}{2k}\cos^2(\omega_0 t)$

6. A $t=\tau$, on cesse d'appliquer la force $\overrightarrow{F_{op}}$. Déterminer l'amplitude X_m des oscillations ultérieures en fonction de τ puis déterminer la bonne réponse parmi les propositions suivantes :

A) $X_m=\frac{F}{k}\left|\sin\left(\frac{\omega_0\tau}{2}\right)\right|$ B) $X_m=l_0+\frac{F}{k}\cos\left(\frac{\omega_0\tau}{2}\right)$ C) $X_m=\frac{2F}{k}|\sin(\omega_0\tau)|$ D) $X_m=\frac{F}{k}\cos(\omega_0\tau)$

7. Calculer la valeur numérique minimale de τ qui assure des oscillations d'amplitude maximale. Choisir la bonne réponse parmi celles proposées ci-après.

A) $\tau=0{,}4\,s$ B) $\tau=15s$ C) $\tau=0{,}08\,s$ D) $\tau=2s$

8. Calculer alors le travail $W_{\overrightarrow{F_{op}}}$ fourni par la force $\overrightarrow{F_{op}}$ entre t=0 et $t=\tau$. Choisir la bonne réponse parmi celles proposées ci-après.

A) $W_{\overrightarrow{F_{op}}}=F l_0$ B) $W_{\overrightarrow{F_{op}}}=2F l_0$ C) $W_{\overrightarrow{F_{op}}}=\frac{2F^2}{k}$ D) $W_{\overrightarrow{F_{op}}}=\frac{F^2}{k}$

9. Lors de l'expérience, on constate que l'amplitude des oscillations dans la deuxième phase du mouvement est divisée par 2 après 25 oscillations. En supposant que le frottement est de type fluide (force proportionnelle à la vitesse), évaluer le facteur de qualité Q de cet oscillateur.

4. Oscillateur oblique ☺☺

Le système représenté *figure 1* est constitué d'une glissière (*T*) soudée à un axe vertical Δ. La glissière et l'axe Δ font un angle α constant . Sur la glissière peut osciller sans frottement une bille M de masse m attachée à un ressort fixé en un point fixe A de Δ. Le ressort est à spires non jointives de raideur k de longueur à vide l_0. L' axe Δ est fixe dans le référentiel du laboratoire.

1) La masse est à l'équilibre, déterminer la longueur l_e du ressort en fonction de m, g, k, l_0 et α.

Rep: $l_e = l_0 + (mg\cos\alpha)/k$

2) On tire la bille d'une longueur X_0 par rapport à sa position d'équilibre et on la lâche sans vitesse initiale.

a) Établir l'équation différentielle du mouvement de la bille **par rapport à sa position d'équilibre.**

b) En déduire l'équation horaire du mouvement.

c) Déterminer l'énergie potentielle Ep(t) ainsi que de l'énergie cinétique Ec(t) de la bille .

d) Montrer qu'il y a conservation et équipartition de l'énergie mécanique de la bille. Représenter Ec(t) et Ep(t).

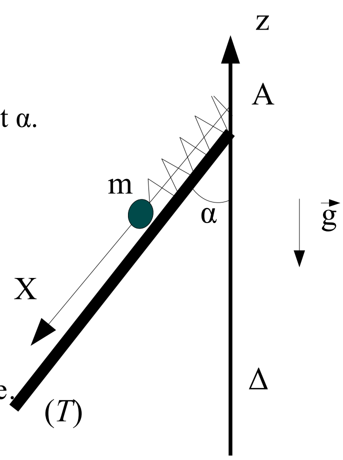


Figure 1

Oscillateurs mécaniques

(suite)

5. Association de deux ressorts verticaux ☺☺☺

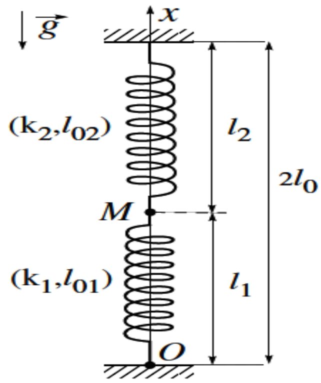
Dans le référentiel terrestre, un point matériel {M,m} est astreint à se déplacer verticalement, sans aucun frottement. Il est retenu par deux ressorts verticaux de constantes de raideur k_1 et k_2 et de longueurs à vide l_{01} et l_{02} avec $l_{01} = l_{02} = l_0$.

1) Effectuer le bilan des forces s'exerçant sur M.

2) À l'aide du principe fondamental de la mécanique, établir :

2.a) la position de M à l'équilibre, notée $x_{éq}$ *Rep :* $x_{éq}=l_0 -mg/(k_1+k_2)$

2.b) l'équation du mouvement vérifiée par $X = x - x_{éq}$



3) Exprimer *Ep* l'énergie potentielle totale de M comme une fonction de la seule variable x et des données constantes du problèmes. *Rep :* $E_p=mgx + ½ (k_1+k_2)(x-l_0)^2 + cste$

4) Établir par des raisonnements énergétiques :

4.a) la position d'équilibre $x_{éq}$

4.b) la nature (stable ou instable) de cet équilibre

4.c) l'équation du mouvement vérifiée par X

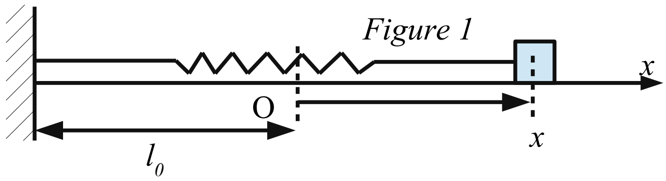
5) À la date t = 0, on abandonne M sans vitesse initiale depuis la position $x(0) = x_0 > x_{éq}$.

Exprimer x(t) pour t > 0 en fonction de x_0, $x_{éq}$ et d'une pulsation ω_0 à expliciter.

Rep : $x(t) = x_{éq} + (x_0-x_{éq}) \cos(\omega_0 t)$.

6. Influence de l'amortissement ☺☺

Une masse m = 5kg attachée à l'extrémité d'un ressort horizontal de raideur *k=80 SI* est en position d'équilibre. On tire cette masse de x_0=3cm et on la lâche sans vitesse initiale. On pose *x(t)* l'allongement du ressort. Le dispositif est représenté *figure 1*.



1. Sachant que la masse est soumise à une force de frottement visqueux du type : $\vec{f}=-\lambda\,\vec{v}$, déterminer l'équation différentielle du mouvement de la masse en *x(t)*.

2. Résoudre l'équation et déterminer l'équation horaire *x(t)* du mouvement ainsi que le temps caractéristique τ de la durée du régime transitoire dans les trois cas suivants :

a) La force d'amortissement vaut 50 fois la vitesse. *Rep :* *x(t)=0,04exp(-2t)-0,01exp(-8t)*

b) La force d'amortissement vaut 20 fois la vitesse. *Rep :* *x(t)=exp(-2t)[003cos(3,46t)+0,017sin(3,46t)]*

c) Il n'y a pas de frottement. *Rep :* *x(t)=003cos(4t)*

3. Quelle valeur de λ correspond au régime critique ? Quelle est alors l'équation horaire *x*(t) du mouvement et la durée du régime transitoire ? *Rep :* *λ=40, x(t)=0,03(1+4t)exp(-4t)*

7. Vibrations d'un moteur ☺☺

Lorsqu'un moteur fonctionne, un balourd provoque des vibrations du châssis. Il est nécessaire de prévoir un système de suspension.

Le moteur étudié est assimilé à un point matériel de masse m. La suspension peut être modélisée par un ressort de longueur à vide l_0 et de raideur k, placé en parallèle avec un amortisseur qui exerce sur le moteur une force de freinage $\vec{f}=-\alpha\frac{dz}{dt}\vec{u_z}$ (Figure 8).

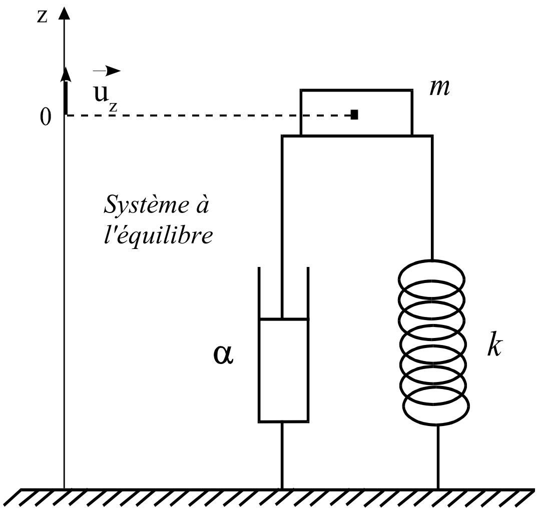


Figure 8

1. Le moteur ne fonctionne pas et il est immobile dans le référentiel d'étude supposé galiléen. Déterminer la longueur l_{eq} du ressort. La position du moteur dans ce cas sera prise dans la suite du problème comme origine de l'axe Oz.

2. Le moteur étant toujours arrêté, on l'écarte de sa position d'équilibre puis on le 1aisse évoluer librement.

2.1. Établir avec soin l'équation différentielle vérifiée par *z(t)* sous sa forme canonique. Identifier le facteur de qualité Q et la pulsation propre ω_0 .

2.2. On suppose $Q>\frac{1}{2}$. Donner la forme générale de la solution *z(t)* en fonction des paramètres Q et ω_0 . Comment appelle-t-on ce régime ?

3. Le moteur fonctionne, tout se passe alors comme s'il apparaissait une force supplémentaire de la forme :

$$\vec{F}=F_0\cos(\omega t)\vec{u_z}$$

3.1. Donner la nouvelle équation différentielle vérifiée par *z(t)*.

3.2. En régime sinusoïdal établi on recherche des solutions de la forme : $z(t)=Z_0\cos(\omega t+\phi)$ et $v(t)=\dot{z}(t)=V_0\cos(\omega t+\psi)$. Établir l'expression de la grandeur complexe $\underline{V}=V_0e^{j\psi}$ en fonction de ω et des paramètres Q, ω_0 et $\frac{F_0}{m}$. En Déduire V_0 en fonction de ω et des paramètres Q, ω_0 et $\frac{F_0}{m}$. Tracer l'allure de $V_0(\omega)$.

3.3. Étudier et tracer ψ(ω)

3.4. La pulsation ω vaut 628 $rad.s^{-1}$. Le moteur a une masse m = 10 kg et on dispose de deux ressorts de raideur $k_1 = 4.10^6\ N.m^{-1}$ et $k_2 = 10^6\ N.m^{-1}$. Lequel faut-il choisir pour réaliser la suspension ?