Oscillateurs mécaniques

1. Oscillations dans un cristal ☺☺

Dans un cristal, un atome de masse 10^{-26} kg effectue des oscillations harmoniques autour de sa position d'équilibre. La fréquence est égale à $f_0 = 10^{12}\,Hz$ et l'amplitude à $X_m = 0{,}05\,nm$. Déterminer :

1. Le module de la vitesse maximale
2. Son énergie mécanique
3. Le module de son accélération maximale
4. La constante de rappel du ressort modélisant les oscillations.

2. Caractéristiques d'oscillations ☺☺

Un pendule élastique horizontal est formé d'un ressort de constante de raideur $k = 20{,}0\,N.m^{-1}$ et d'une masse m=200 g. A l'instant $t = 0$, la masse est écartée de $x_0 = 2{,}00\,cm$ de sa position d'équilibre avec la vitesse initiale $v_0 = 20{,}0\,cm.s^{-1}$.

1. Calculer la valeur de l'énergie mécanique totale de l'oscillateur à l'instant du lancement.
2. En déduire l'amplitude des oscillations ainsi que la vitesse de passage par la position d'équilibre.

Réponses : (E_m = 8 mJ ; X_m = 2,83 cm ; v_{max} = 28,3 cm/s)

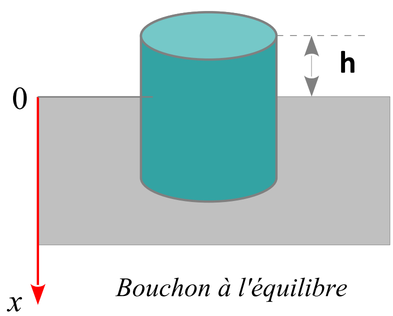
3. Oscillations d'un bouchon ☺☺

Un bouchon de forme cylindrique de masse volumique μ_1 flotte verticalement dans l'eau de masse volumique

$\mu_2 > \mu_1$. On pose $\alpha = \mu_1/\mu_2$. Le cylindre a pour surface S et pour hauteur H.

1) Montrer que la hauteur h *(figure ci-contre)* du cylindre hors de l'eau à l'équilibre est : $h = H(1-\alpha)$.

2) A partir de la position d'équilibre , On enfonce le cylindre dans l'eau d'une hauteur $a < h$ et on l'abandonne sans vitesse initiale. Le cylindre reste toujours vertical. Déterminer les forces qui s'exercent sur lui lorsqu'il est enfoncé d'une hauteur x par rapport à sa position d'équilibre et en déduire la loi de son mouvement $x(t)$.



Bouchon à l'équilibre

4. Brigandage *(résolution de problème)*☺☺

En 1587, un contrôleur des impôts convoie les fonds prélevés dans la campagne drômoise. Des caisses remplies d'or alourdissent son fourgon dont la masse est alors de l'ordre de 800 kg, contrôleur inclus. Les irrégularités de la chaussée ardéchoise occasionnent des oscillations du fourgon à la fréquence de 0,5 Hz environ. Attaqué de vive force par des brigands lyonnais, le contrôleur se trouve délesté de tout son or. Il poursuit son chemin , oscillant maintenant à une fréquence de l'ordre de 0,7 Hz. Estimer la masse d'or volée.

5. Oscillateur oblique ☺☺

Le système représenté *figure 1* est constitué d'une glissière (T) soudée à un axe vertical Δ. La glissière et l'axe Δ font un angle α constant . Sur la glissière peut osciller sans frottement une bille M de masse m attachée à un ressort fixé en un point fixe A de Δ. Le ressort est à spires non jointives de raideur k de longueur à vide l_0. L' axe Δ est fixe dans le référentiel du laboratoire.

1) La masse est à l'équilibre, déterminer la longueur l_e du ressort en fonction de m, g, k, l_0 et α.

Rep: $l_e = l_0 + (mg\cos\alpha)/k$

2) On tire la bille d'une longueur X_0 par rapport à sa position d'équilibre et on la lâche sans vitesse initiale.

a) Établir l'équation différentielle du mouvement de la bille **par rapport à sa position d'équilibre.**

b) En déduire l'équation horaire du mouvement.

c) Déterminer l'énergie potentielle Ep(t) ainsi que de l'énergie cinétique Ec(t) de la bille . Montrer qu'il y a conservation de l'énergie mécanique de la bille.

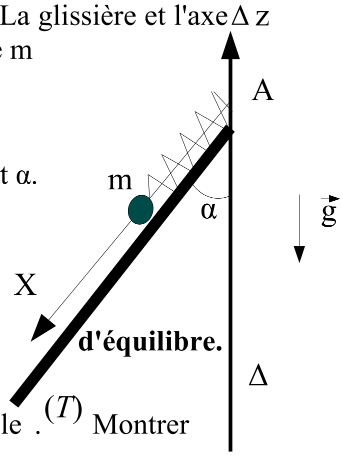
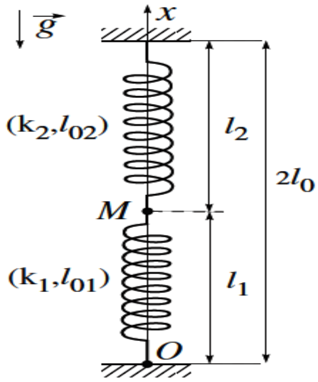


Figure 1

6. Association de deux ressorts verticaux ☺☺☺

Dans le référentiel terrestre, un point matériel {M,m} est astreint à se déplacer verticalement, sans aucun frottement. Il est retenu par deux ressorts verticaux de constantes de raideur k_1 et k_2 et de longueurs à vide l_{01} et l_{02} avec $l_{01} = l_{02} = l_0$.



1) Effectuer le bilan des forces s'exerçant sur M.

2) À l'aide du principe fondamental de la mécanique, établir :

2.a) la position de M à l'équilibre, notée $x_{éq}$ *Rep :* $x_{éq}=l_0 -mg/(k_1+k_2)$

2.b) l'équation du mouvement vérifiée par $X = x - x_{éq}$

3) Exprimer *Ep* l'énergie potentielle totale de M comme une fonction de la seule variable *x* et des données constantes du problèmes. *Rep :* $E_p=mgx + ½ (k_1+k_2)(x-l_0)^2 + cste$

4) Établir par des raisonnements énergétiques :

4.a) la position d'équilibre $x_{éq}$

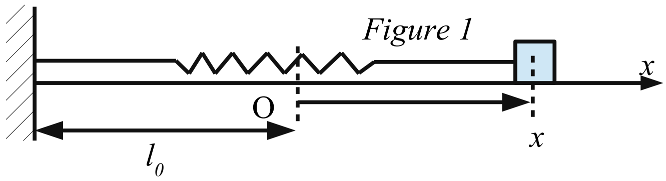
4.b) la nature (stable ou instable) de cet équilibre

4.c) l'équation du mouvement vérifiée par X

5) À la date t = 0, on abandonne M sans vitesse initiale depuis la position $x(0) = x_0 > x_{éq}$.
Exprimer x(t) pour t > 0 en fonction de x_0, $x_{éq}$ et d'une pulsation ω_0 à expliciter.
Rep : $x(t) = x_{éq} + (x_0-x_{éq}) \cos(\omega_0 t)$.

7. Influence de l'amortissement ☺☺

Une masse m = 5kg attachée à l'extrémité d'un ressort horizontal de raideur *k=80 SI* est en position d'équilibre. On tire cette masse de x_0=3cm et on la lâche sans vitesse initiale. On pose *x(t)* l'allongement du ressort. Le dispositif est représenté *figure 1*.



1. Sachant que la masse est soumise à une force de frottement visqueux du type : $\vec{f}=-\lambda\vec{v}$, déterminer l'équation différentielle du mouvement de la masse en *x(t)*.

2. Résoudre l'équation et déterminer l'équation horaire *x(t)* du mouvement ainsi que le temps caractéristique τ de la durée du régime transitoire dans les trois cas suivants :

a) La force d'amortissement vaut 50 fois la vitesse. *Rep :* $x(t)=0{,}04\exp(-2t)-0{,}01\exp(-8t)$

b) La force d'amortissement vaut 20 fois la vitesse. *Rep :* $x(t)=\exp(-2t)[003\cos(3{,}46t)+0{,}017\sin(3{,}46t)]$

c) Il n'y a pas de frottement. *Rep :* $x(t)=003\cos(4t)$

3. Quelle valeur de λ correspond au régime critique ? Quelle est alors l'équation horaire *x*(t) du mouvement et la durée du régime transitoire ? *Rep :* $\lambda=40$, $x(t)=0{,}03(1+4t)\exp(-4t)$

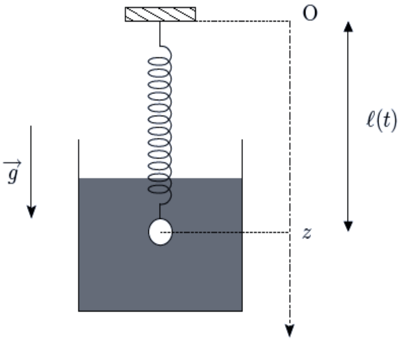
Oscillateurs mécaniques

(suite)

8. Mesure du coefficient de viscosité de la glycérine ☺☺

Une bille d'acier de masse volumique $\rho = 7800 kg.m^{-3}$ de rayon r=5mm plongée dans de la glycérine de masse volumique $\rho_0 = 1260 kg.m^{-3}$ est suspendue à l'extrémité d'un ressort vertical de constante de raideur k = 1,2 Nm^{-1} et de longueur à vide l_0=10cm, comme l'indique la figure ci-contre. On définit la viscosité η de la glycérine par l'expression de la force de frottement $\vec{f}$ qu'elle exerce sur la bille quand celle-ci est en mouvement à la vitesse $\vec{v}$: $\vec{f} = -6\pi\eta r \vec{v}$

On rappelle que d'après le principe d'Archimède , la résultante des forces de pression exercée par un fluide sur une sphère est opposée au poids du fluide déplacé par la sphère. Le volume d'une sphère de rayon r est : $V = \frac{4}{3}\pi r^3$



Le champ de pesanteur supposé uniforme est noté $\vec{g} = g\vec{u_z}$ avec pour module $g = 9,8 m.s^{-2}$.

La position de la bille est repérée par son abscisse z(t) mesurée à l'instant t sur l'axe Oz vertical descendant fixe dans le référentiel *R* d'étude supposé galiléen .

L'origine de l'axe est choisie telle que la longueur instantanée du ressort $l(t)$ soit égale à *z(t)*.

1. Déterminer l'expression de l'abscisse z_{eq} de la bille lorsque celle-ci est en équilibre dans R en fonction de l_o, ρ, ρ_0, r, g et k. Le ressort est-il étiré ou comprimé dans cet état d'équilibre?

2. Déterminer l'équation différentielle vérifier par z(t) lorsque la bille est en mouvement.

3. On cherche à étudier la bille en mouvement par rapport à sa position d'équilibre. Pour se faire, on pose $Z(t) = z(t) - z_{eq}$.

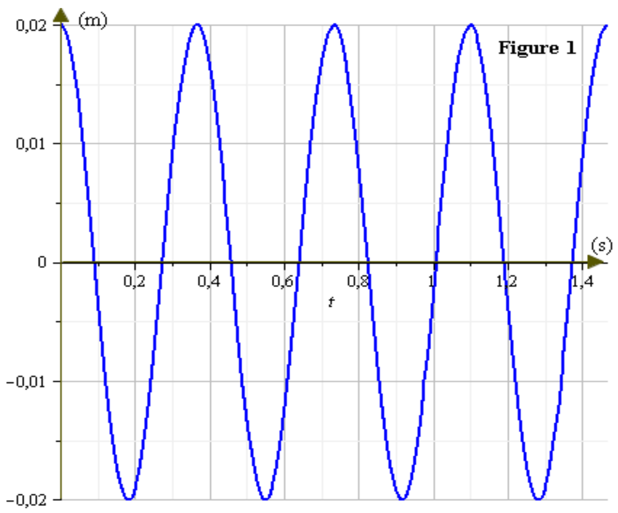
3.1. Montrer que Z(t) vérifie une équation du type: $\ddot{Z} + 2\lambda\dot{Z} + \omega_0^2 Z = 0$ et donner les expressions des constantes λ et ω_0 en fonction de r, η, m et k.

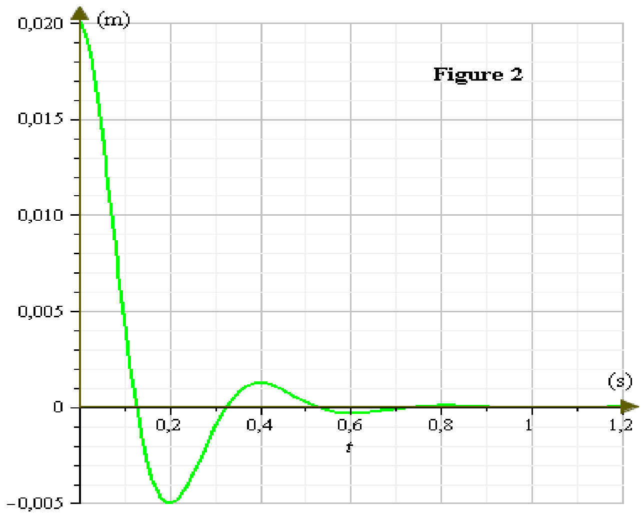
3.2. A quelle condition sur η la bille effectue-t-elle des oscillations amorties dans le fluide ? Sous cette condition, écrire la relation liant la pseudo-pulsation ω , la pulsation propre ω_0 et la constante λ.

3.3. On mesure la période T_0 des oscillations de la bille dans l'air où les frottements peuvent être négligés ; Puis on mesure la pseudo-période T des oscillations de la bille dans la glycérine.

a) Exprimer la viscosité η de la glycérine en fonction de T_0, T, de la masse volumique ρ de la bille et de son rayon r.

b) La figure 1 représente les oscillations de la masse dans l'air . La figure 2 représente les oscillations dans la glycérine. Pour les 2 courbes l'axe des abscisses est gradué en seconde et l'axe des ordonnées en mètre.
En déduire le coefficient de viscosité η de la glycérine dans les conditions de l'expérience.





9. Vibrations d'un moteur ☺☺

Lorsqu'un moteur fonctionne, un balourd provoque des vibrations du châssis. Il est nécessaire de prévoir un système de suspension.

Le moteur étudié est assimilé à un point matériel de masse m. La suspension peut être modélisée par un ressort de longueur à vide l_0 et de raideur k, placé en parallèle avec un amortisseur qui exerce sur le moteur une force de freinage $\vec{f}=-\alpha\frac{dz}{dt}\vec{u_z}$ (Figure 8).

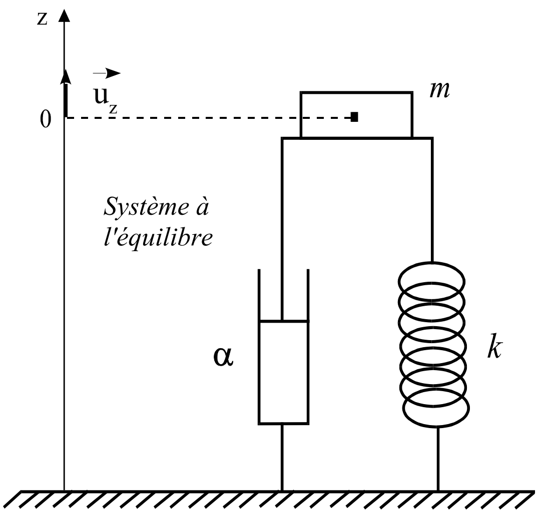


Figure 8

1. Le moteur ne fonctionne pas et il est immobile dans le référentiel d'étude supposé galiléen. Déterminer la longueur l_{eq} du ressort. La position du moteur dans ce cas sera prise dans la suite du problème comme origine de l'axe Oz.

2. Le moteur étant toujours arrêté, on l'écarte de sa position d'équilibre puis on le 1aisse évoluer librement.

2.1. Établir avec soin l'équation différentielle vérifiée par *z(t)* sous sa forme canonique. Identifier le facteur de qualité Q et la pulsation propre ω_0 .

2.2. On suppose $Q>\frac{1}{2}$. Donner la forme générale de la solution *z(t)* en fonction des paramètres Q et ω_0 . Comment appelle-t-on ce régime ?

3. Le moteur fonctionne, tout se passe alors comme s'il apparaissait une force supplémentaire de la forme :

$$\vec{F}=F_0\cos(\omega t)\vec{u_z}$$

3.1. Donner la nouvelle équation différentielle vérifiée par *z(t)*.

3.2. En régime sinusoïdal établi on recherche des solutions de la forme : $z(t)=Z_0\cos(\omega t+\phi)$ et $v(t)=\dot{z}(t)=V_0\cos(\omega t+\psi)$. Établir l'expression de la grandeur complexe $\underline{V}=V_0e^{j\psi}$ en fonction de ω et des paramètres Q, ω_0 et $\frac{F_0}{m}$. En Déduire V_0 en fonction de ω et des paramètres Q, ω_0 et $\frac{F_0}{m}$. Tracer l'allure de $V_0(\omega)$.

3.3. Étudier et tracer $\psi(\omega)$

3.4. La pulsation ω vaut 628 $rad.s^{-1}$. Le moteur a une masse m = 10 kg et on dispose de deux ressorts de raideur k_1 = 4.10^6 $N.m^{-1}$ et k_2 = 10^6 $N.m^{-1}$. Lequel faut-il choisir pour réaliser la suspension ?