

Correction

1. Oscillations dans un cristal ☺☺

Dans un cristal, un atome de masse 10^{-26} kg effectue des oscillations harmoniques autour de sa position d'équilibre. La fréquence est égale à $f_0 = 10^{12} \text{ Hz}$ et l'amplitude à $X_m = 0,05 \text{ nm}$. Déterminer :

1. Le module de la vitesse maximale.
2. Son énergie mécanique.
3. Le module de son accélération maximale.
4. La constante de rappel du ressort modélisant les oscillations.

Solution :

1. Lorsque la vitesse est maximale l'énergie potentielle est nulle ainsi $E_m = \frac{1}{2} m v_{\max}^2$. Quand l'allongement est maximal égal à X_m l'énergie cinétique est nulle ainsi $E_m = \frac{1}{2} k X_m^2$. Au cours du temps, il y a conservation de l'énergie mécanique donc $\frac{1}{2} m v_{\max}^2 = \frac{1}{2} k X_m^2$ d'où $v_{\max} = \sqrt{\frac{k}{m}} X_m = \omega_0 X_m$ or $\omega_0 = 2\pi f_0$ donc

$$v_{\max} = 2\pi f_0 X_m. \text{ Application numérique : } v_{\max} = 2\pi \times 10^{12} \times 0,05 \cdot 10^{-9} = 314 \text{ m.s}^{-1}$$

$$2. E_m = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 = \frac{1}{2} m (2\pi f_0 X_m)^2 \text{ donc } E_m = 2m(\pi f_0 X_m)^2.$$

$$\text{Application numérique : } E_m = 2 \times 10^{-26} \times (\pi \times 10^{12} \times 0,05 \cdot 10^{-9})^2 = 4,93 \cdot 10^{-22} \text{ J}$$

3. l'accélération $a(t) = -\omega_0^2 x(t)$ donc son module est maximum quand $x(t)$ est maximum donc

$$a_{\max} = \omega_0^2 X_m = 4\pi^2 f_0^2 X_m. \text{ Application numérique : } a_{\max} = 4\pi^2 10^{24} \times 0,05 \cdot 10^{-9} = 1,97 \cdot 10^{15} \text{ m.s}^{-2}$$

$$4. k = m \omega_0^2 = m 4\pi^2 f_0^2. \text{ Application numérique : } k = 10^{-26} 4\pi^2 10^{24} = 0,395 \text{ N.m}^{-1}$$

2. Caractéristiques d'oscillations ☺☺

Un pendule élastique horizontal est formé d'un ressort de constante de raideur $k = 20,0 \text{ N.m}^{-1}$ et d'une masse $m = 200 \text{ g}$. A l'instant $t = 0$, la masse est écartée de $x_0 = 2,00 \text{ cm}$ de sa position d'équilibre avec la vitesse initiale $v_0 = 20,0 \text{ cm.s}^{-1}$.

1. Calculer la valeur de l'énergie mécanique totale de l'oscillateur à l'instant du lancement.
2. En déduire l'amplitude des oscillations ainsi que la vitesse de passage par la position d'équilibre.

Réponses : ($E_m = 8 \text{ mJ}$; $X_m = 2,83 \text{ cm}$; $v_{\max} = 28,3 \text{ cm/s}$)

Solution :

$$1. E_m = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} k x_0^2. \text{ Application numérique : } E_m = \frac{1}{2} \times 0,2 \times 0,2^2 + \frac{1}{2} \times 20 \times 0,02^2 \text{ donc } E_m = 8,00 \text{ mJ}$$

$$2. E_m = \frac{1}{2} k X_m^2 \text{ donc } X_m = \sqrt{2 \frac{E_m}{k}}$$

$$\text{Application numérique : } X_m = \sqrt{\frac{2 \times 8 \cdot 10^{-3}}{20}} \text{ donc } X_m = 2,83 \text{ cm}$$

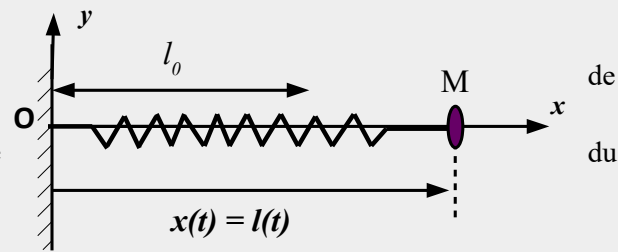
Lors du passage à la position d'équilibre toute l'énergie mécanique est sous forme d'énergie cinétique :

$$E_m = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 \text{ donc } v_{\max} = \sqrt{2 \frac{E_m}{m}}. \text{ Application numérique : } v_{\max} = \sqrt{\frac{2 \times 8 \cdot 10^{-3}}{0,2}} \text{ donc } v_{\max} = 28,3 \text{ cm.s}^{-1}.$$

3. Oscillations d'une perle ☺☺

Première partie

Une perle de masse $m = 200 \text{ g}$ considérée comme ponctuelle peut coulisser sans frottement sur une tige horizontale. Cette perle est attachée à l'extrémité d'un ressort horizontal de masse négligeable, constante de raideur $k = 12,0 \text{ N.m}^{-1}$ et le longueur à vide $l_0 = 30,0 \text{ cm}$ comme l'indique la figure ci-contre. Le point d'attache ressort noté O est fixe et sert d'origine à l'axe Ox .

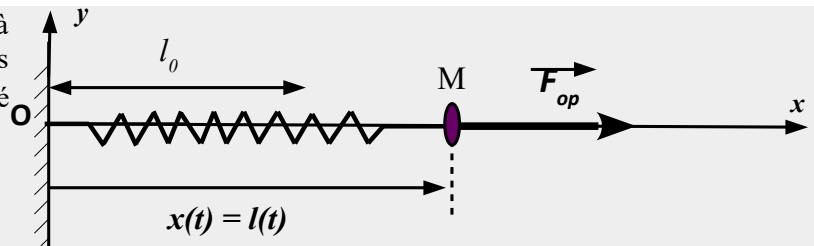


A $t=0$, on tire le ressort d'une quantité $X_0 = 12 \text{ cm}$ par rapport à sa position d'équilibre et on lâche la perle sans vitesse initiale.

1. Établir l'équation différentielle du mouvement de la perle vérifiée par son abscisse $x(t)$ correspondant à la longueur du ressort. En déduire la pulsation propre ω_0 des oscillations puis résoudre l'équation.
2. Représenter $x(t)$ sur 2 périodes. Préciser l'amplitude des oscillations et la valeur moyenne de $x(t)$.
3. Calculer l'énergie cinétique de la perle quand elle passe par sa position d'équilibre.

Deuxième partie

La perle est initialement au repos et on applique à partir d'un instant pris comme origine des temps une force $\vec{F}_{op} = F \vec{u}_x$ constante comme indiqué sur le schéma ci-contre.



4. Établir l'équation différentielle du mouvement de la perle vérifiée par son abscisse $x(t)$ correspondant toujours à la longueur du ressort. En déduire la pulsation propre ω_0 des oscillations puis résoudre l'équation et déterminer la bonne réponse parmi les propositions suivantes :

A) $x(t) = \frac{F}{k}(1 - \cos(\omega_0 t)) + l_0$

B) $x(t) = \frac{F}{k} \sin(\omega_0 t) + l_0$

C) $x(t) = \frac{F}{m}(1 + \cos(\omega_0 t)) + l_0$

D) $x(t) = \frac{F}{k}(\cos(\omega_0 t) - 1) + l_0$

5. L'énergie mécanique de la perle au cours de son mouvement est définie comme la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle élastique. Etablir l'expression de l'énergie mécanique de la perle. Quelle est la bonne réponse parmi les propositions suivantes :

A) $E_m = \frac{1}{2} k l_0^2$

B) $E_m = \frac{F^2}{k}(1 - \cos(\omega_0 t))$

C) $E_m = \frac{F^2 t^2}{m 2}$

D) $E_m = \frac{k F}{2 k} \cos^2(\omega_0 t)$

6. A $t = \tau$, on cesse d'appliquer la force $\vec{F}_{op}$. Déterminer l'amplitude X_m des oscillations ultérieures en fonction de τ puis déterminer la bonne réponse parmi les propositions suivantes :

A) $X_m = \frac{F}{k} \left| \sin\left(\frac{\omega_0 \tau}{2}\right) \right|$

B) $X_m = l_0 + \frac{F}{k} \cos\left(\frac{\omega_0 \tau}{2}\right)$

C) $X_m = 2 \frac{F}{k} \left| \sin\left(\frac{\omega_0 \tau}{2}\right) \right|$

D) $X_m = \frac{F}{k} \cos(\omega_0 \tau)$

7. Calculer la valeur numérique minimale de τ qui assure des oscillations d'amplitude maximale. Choisir la bonne réponse parmi celles proposées ci-après.

A) $\tau = 0,4 \text{ s}$

B) $\tau = 15 \text{ s}$

C) $\tau = 0,08 \text{ s}$

D) $\tau = 2 \text{ s}$

8. Calculer alors le travail $W_{\vec{F}_{op}}$ fourni par la force $\vec{F}_{op}$ entre $t=0$ et $t = \tau$. Choisir la bonne réponse parmi celles proposées ci-après.

A) $W_{\vec{F}_{op}} = F l_0$

B) $W_{\vec{F}_{op}} = 2 F l_0$

C) $W_{\vec{F}_{op}} = \frac{2 F^2}{k}$

D) $W_{\vec{F}_{op}} = \frac{F^2}{k}$

9. Lors de l'expérience, on constate que l'amplitude des oscillations dans la deuxième phase du mouvement est divisée par 2 après 25 oscillations. En supposant que le frottement est de type fluide (force proportionnelle à la vitesse), évaluer le facteur de qualité Q de cet oscillateur.

Solution (d'après ENAC 2012)

1. Ref d'étude: ref terrestre, repère d'espace associé: $R(0, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$

Système: perle de masse m , Coordonnées: cartésiennes (x, y)

Base de projection: $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$, Vecteurs cinématiques: $\vec{OM} = x \vec{u}_x$ $\vec{v} = \dot{x} \vec{u}_x = v \vec{u}_x$ $\vec{a} = \ddot{x} \vec{u}_x$ ($y=0$)

Bilan des forces:

- Poids: $\vec{P} = m\vec{g} = -mg \vec{u}_y$
- Réaction du support: $\vec{R} = R\vec{u}_y$ orthogonale au déplacement car pas de frottements
- Force de Hooke (force de rappel du ressort): $\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}_x = -k(x - l_0)\vec{u}_x$

2ème loi de Newton (principe fondamental de la dynamique):

- $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}$
- Par projection sur l'axe ox : $m\ddot{x} = -kx + kl_0$ d'où $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 l_0$ avec $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ la pulsation propre des oscillations.
- La solution est de la forme: $x(t) = x_h(t) + x_p(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + l_0$.

Exploitation de la première condition initiale:

D'après la solution $x(0) = A + l_0$ or $x(0) = l_0 + X_0$ donc $A = X_0$.

Exploitation de la deuxième condition initiale: On calcule la dérivée de $x(t)$ pour exprimer la vitesse de la masse pour tout t : $\dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t)$.

D'après cette équation $\dot{x}(0) = B\omega_0$ or $\dot{x}(0) = 0$ donc $B = 0$ d'où $x(t) = X_0 \cos(\omega_0 t) + l_0$.

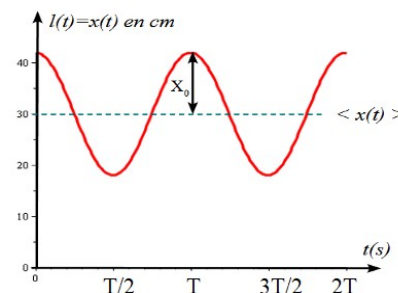
Applications numériques: $\omega_0 = \sqrt{k/m} = \sqrt{12/0,2} = 7,75 \text{ rad.s}^{-1}$ donc $x(t) = 12 \cos(7,75 t) + 30 \text{ cm}$.

2. Représentation graphique sur 2 périodes:

La période des oscillations est: $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 0,81 \text{ s}$

L'amplitude des oscillations est $X_0 = 12 \text{ cm}$.

La valeur moyenne est $\langle x(t) \rangle = 30 \text{ cm}$



3. La bille n'est soumise qu'à des forces conservatives. Son énergie mécanique

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k (l - l_0)^2 \text{ est constante au cours du mouvement on ne}$$

tient pas compte de l'énergie potentielle de pesanteur constante au cours du mouvement. Quand la perle passe par la position d'équilibre toute son énergie mécanique est sous forme d'énergie cinétique donc $E_c = E_m(t=0) = \frac{1}{2} k X_0^2$.

Application numérique: $E_c = \frac{1}{2} \times 12 \times 0,12^2 = 86,4 \text{ mJ}$.

4. Ref d'étude: ref terrestre, repère d'espace associé: $R(0, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$

Système: perle de masse m , Coordonnées: cartésiennes (x, y)

Base de projection: $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$, Vecteurs cinématiques: $\vec{OM} = x \vec{u}_x$ $\vec{v} = \dot{x} \vec{u}_x = v \vec{u}_x$ $\vec{a} = \ddot{x} \vec{u}_x = a \vec{u}_x$ ($y=0$)

Bilan des forces:

- Poids: $\vec{P} = m\vec{g} = -mg \vec{u}_y$
- Réaction du support: $\vec{R} = R\vec{u}_y$ orthogonale au déplacement car pas de frottements
- Force de Hooke (force de rappel du ressort): $\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}_x = -k(x - l_0)\vec{u}_x$
- Force $\vec{F}_{op} = F \vec{u}_x$

2ème loi de Newton (principe fondamental de la dynamique):

- $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} + \vec{F}_{op}$

- Par projection sur l'axe ox: $m\ddot{x} = -kx + kl_0 + F$ d'où $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 l_0 + \frac{F}{m}$ avec $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ la pulsation propre des oscillations.

- La solution est de la forme: $x(t) = x_h(t) + x_p(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + l_0 + \frac{F}{m \omega_0^2}$.

Exploitation de la première condition initiale :

D'après la solution $x(0) = A + l_0 + \frac{F}{m \omega_0^2}$ or $x(0) = l_0$ donc $A = -\frac{F}{m \omega_0^2}$.

Exploitation de la deuxième condition initiale : On calcule la dérivée de $x(t)$ pour exprimer la vitesse de la masse pour tout t : $\dot{x}(t) = -A \omega_0 \sin(\omega_0 t) + B \omega_0 \cos(\omega_0 t)$.

D'après cette équation $\dot{x}(0) = B \omega_0$ or $\dot{x}(0) = 0$ donc $B = 0$. d'où $x(t) = \frac{F}{m \omega_0^2} (1 - \cos(\omega_0 t)) + l_0$. or

$$m \omega_0^2 = k \text{ d'où } x(t) = \frac{F}{k} (1 - \cos(\omega_0 t)) + l_0 \text{ Rép A.}$$

$$5. E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k (x - l_0)^2 = \frac{1}{2} m \frac{F^2 \omega_0^2}{k^2} \sin^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2} k \frac{F^2}{k^2} (1 - \cos(\omega_0 t))^2 \text{ or } \frac{\omega_0^2}{k} = \frac{1}{m} \text{ d'où}$$

$$E_m = \frac{1}{2} \frac{F^2}{k} (\sin^2(\omega_0 t) + (1 - \cos(\omega_0 t))^2) = \frac{1}{2} \frac{F^2}{k} (2 - 2 \cos(\omega_0 t)) \text{ d'où } E_m = \frac{F^2}{k} (1 - \cos(\omega_0 t)) \text{ Rép B.}$$

6. A partir du moment où l'on supprime la force, l'énergie mécanique se conserve. Lorsque le ressort est tiré au maximum, l'énergie cinétique de la perle est nulle d'où $E_m = \frac{F^2}{k} (1 - \cos(\omega_0 \tau)) = \frac{1}{2} k X_m^2$ d'où

$$X_m^2 = \frac{2F^2}{k^2} (1 - \cos(\omega_0 \tau)) \text{ d'où } X_m = \frac{F}{k} \sqrt{2(1 - \cos(\omega_0 \tau))} \text{ or } \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x \text{ d'où}$$

$$X_m = \frac{F}{k} \sqrt{4 \sin^2\left(\frac{\omega_0 \tau}{2}\right)} = \frac{2F}{k} \left| \sin\left(\frac{\omega_0 \tau}{2}\right) \right| \text{ Rép C.}$$

7. L'amplitude des oscillations est maximale quand $\sin\left(\frac{\omega_0 \tau}{2}\right) = 1$ soit pour la plus petite valeur de τ : $\frac{\omega_0 \tau}{2} = \frac{\pi}{2}$.
D'où

$$\tau = \frac{\pi}{\omega_0} = \pi \sqrt{\frac{m}{k}} = \pi \sqrt{\frac{0,2}{12}} = 0,4 \text{ s} \text{ Rép A.}$$

8. La force $\vec{F}$ est une force constante donc $W_{\vec{F}}(x(0) \rightarrow x(\tau)) = F \times [x(\tau) - x(0)] = \frac{F \times F}{k} (1 - \cos(\omega_0 \tau))$ or

$$\omega_0 \tau = \pi \text{ d'où } W_{\vec{F}_{op}} = \frac{2F^2}{k} \text{ Rép C.}$$

9. Lors de frottement fluides les oscillations par rapport à la position d'équilibre sont régies par une équation du type :

$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$. Cette fois-ci $x = l - l_0$. La solution est du type : $x(t) = A e^{-\frac{\omega_0}{2Q} t} \cos(\omega t + \phi)$. Le nombre

d'oscillations étant important, on peut confondre pulsation propre et pseudo-pulsation. Ainsi pour $t = 25 T_0$,

$$e^{-\frac{\omega_0}{2Q} 25 T_0} = \frac{1}{2} \text{ soit } \frac{\omega_0}{2Q} 25 T_0 = \ln 2 \text{ or } \omega_0 T_0 = 2\pi \text{ d'où } Q = \frac{25\pi}{\ln 2} = 113 \approx 110.$$

4. Oscillateur oblique ☺☺

Le système représenté *figure 1* est constitué d'une glissière (T) soudée à un axe vertical Δ . La glissière et l'axe Δ^Z font un angle α constant. Sur la glissière peut osciller sans frottement une bille M de masse m attachée à un ressort fixé en un point fixe A de Δ . Le ressort est à spires non jointives de raideur k de longueur à vide l_0 . L'axe Δ est fixe dans le référentiel du laboratoire.

1) La masse est à l'équilibre, déterminer la longueur l_e du ressort en fonction de m , g , k , l_0 et α .

Rep: $l_e = l_0 + (mg \cos \alpha) / k$

2) On tire la bille d'une longueur X_0 par rapport à sa position d'équilibre et on la lâche sans vitesse initiale.

a) Établir l'équation différentielle du mouvement de la bille **par rapport à sa position d'équilibre**.

b) En déduire l'équation horaire du mouvement.

c) Déterminer l'énergie potentielle $E_p(t)$ ainsi que de l'énergie cinétique $E_c(t)$ de la bille.

d) Montrer qu'il y a conservation et équipartition de l'énergie mécanique de la bille.

Représenter $E_c(t)$ et $E_p(t)$.

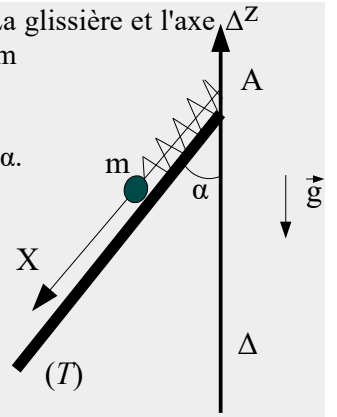


Figure 1

Solution

5. Association de deux ressorts verticaux ☺☺☺

Dans le référentiel terrestre, un point matériel $\{M, m\}$ est astreint à se déplacer verticalement, sans aucun frottement. Il est retenu par deux ressorts verticaux de constantes de raideur k_1 et k_2 et de longueurs à vide l_{01} et l_{02} avec $l_{01} = l_{02} = l_0$.

1) Effectuer le bilan des forces s'exerçant sur M.

2) À l'aide du principe fondamental de la mécanique, établir :

2.a) la position de M à l'équilibre, notée x_{eq} .

2.b) l'équation du mouvement vérifiée par $X = x - x_{\text{eq}}$

3) Exprimer E_p l'énergie potentielle totale de M comme une fonction de la seule variable x et des données constantes du problème.

4) Établir par des raisonnements énergétiques :

4.a) la position d'équilibre x_{eq}

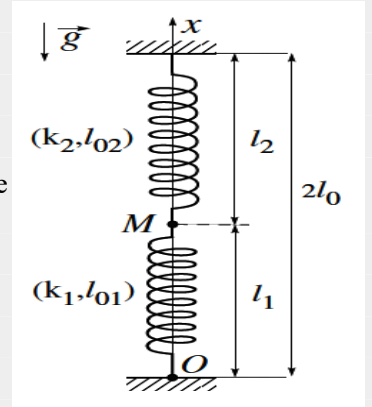
4.b) la nature (stable ou instable) de cet équilibre

4.c) l'équation du mouvement vérifiée par X

5) À la date $t = 0$, on abandonne M sans vitesse initiale depuis la position $x(0) = x_0 > x_{\text{eq}}$.

Exprimer $x(t)$ pour $t > 0$ en fonction de x_0 , x_{eq} et d'une pulsation ω_0 à expliciter.

Rep : 2a) Rep : $x_{\text{eq}} = l_0 - mg/(k_1 + k_2)$; 3) Rep : $E_p = mgx + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)(x - l_0)^2 + \text{cte}$; 5) $x(t) = x_{\text{eq}} + (x_0 - x_{\text{eq}}) \cos(\omega_0 t)$.



Solution :

1) Forces exercées sur M dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

- poids : $m \vec{g} = -mg \vec{e}_x$

- force de rappel du ressort (1) : $\vec{T}_1 = -k_1 \cdot (l_1 - l_0) \cdot \vec{e}_x = -k_1 \cdot (x - l_0) \cdot \vec{e}_x$

- force de rappel du ressort (2) : $\vec{T}_2 = -k_2 \cdot (l_2 - l_0) \cdot (-\vec{e}_x) = +k_2 \cdot ((2l_0 - x) - l_0) \cdot \vec{e}_x = -k_2 \cdot (x - l_0) \cdot \vec{e}_x$

2.a) Le PFD s'écrit : $m \vec{a}_{M/\mathcal{R}_T} = m \vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2$

Soit, en projection selon $\vec{e}_x$:

$$\begin{cases} \text{hors équilibre} & m\ddot{x} = -mg - (k_1 + k_2) \cdot (x - l_0) & \textcircled{1} \\ \text{à l'équilibre} & 0 = -mg - (k_1 + k_2) \cdot (x_{\text{eq}} - l_0) & \textcircled{2} \end{cases}$$

La relation ② donne : $x_{\text{eq}} = l_0 - \frac{mg}{k_1 + k_2}$

2.b) En effectuant ① - ②, on obtient : $m\ddot{x} = -(k_1 + k_2) \cdot (x - x_{\text{eq}})$

Soit : $\xrightarrow{X=x-x_{\text{eq}}} \ddot{X} + \frac{k_1 + k_2}{m} \cdot X = 0 \Leftrightarrow \boxed{\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0}$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$

3) $\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_{p_g} + \mathcal{E}_{p_{el1}} + \mathcal{E}_{p_{el2}} = mgx + \frac{1}{2}k_1 \cdot (l_1 - l_0)^2 + \frac{1}{2}k_2 \cdot (l_2 - l_0)^2 + \text{Cte}$

Soit : $\boxed{\mathcal{E}_p = mgx + \frac{1}{2} \cdot (k_1 + k_2) \cdot (x - l_0)^2 + \text{Cte}}$

4.a) Pour trouver la position d'équilibre on pose :

$$\left(\frac{d\mathcal{E}_p}{dx} \right)_{x_{\text{eq}}} = \begin{cases} 0 \\ (k_1 + k_2) \cdot (x_{\text{eq}} - l_0) + mg \end{cases} \Rightarrow \boxed{x_{\text{eq}} = l_0 - \frac{mg}{k_1 + k_2}}$$

4.b) En dérivant une seconde fois, on établit que l'équilibre est stable puisque :

$$\boxed{\left(\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2} \right)_{x_{\text{eq}}} = k_1 + k_2 > 0}$$

4.c) Pour établir l'équation du mouvement, on applique le théorème de la puissance mécanique :

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = \frac{d\mathcal{E}_k + \mathcal{E}_p}{dt} = \begin{cases} \mathcal{P}_{NC} = 0 \\ m \cdot \dot{x} \cdot \ddot{x} + (k_1 + k_2) \cdot \dot{x} \cdot (x - l_0) + mg\dot{x} \end{cases} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k_1 + k_2}{m} \cdot (x - l_0) + g = 0$$

On retrouve : $\boxed{\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0}$

5) La solution est de la forme : $X = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$

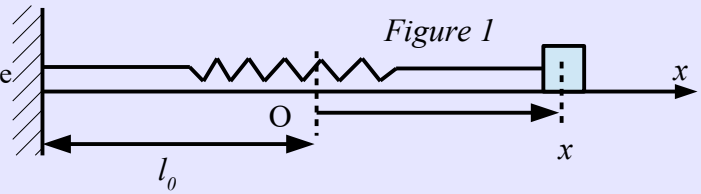
La dérivée est : $\dot{X} = -X_m \cdot \omega_0 \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi)$.

Les conditions initiales donnent :

$$\begin{cases} X(0) = X_m \cos(\varphi) = x_0 - x_{\text{eq}} \\ \dot{X}(0) = -X_m \omega_0 \sin(\varphi) = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x(t) = x_{\text{eq}} + (x_0 - x_{\text{eq}}) \cdot \cos(\omega_0 t)}$$

6. Influence de l'amortissement ☺☺

Une masse $m=5\text{kg}$ attachée à l'extrémité d'un ressort horizontal de raideur $k=80\text{ SI}$ est en position d'équilibre. On tire cette masse de $x_0=3\text{cm}$ et on la lâche sans vitesse initiale. On pose $x(t)$ l'allongement du ressort. Le dispositif est représenté *figure 1*.



1. Sachant que la masse est soumise à une force de frottement visqueux du type : $\vec{f} = -\lambda \vec{v}$, déterminer l'équation différentielle du mouvement de la masse en $x(t)$.
2. Résoudre l'équation et déterminer l'équation horaire $x(t)$ du mouvement ainsi que le temps caractéristique τ de la durée du régime transitoire dans les trois cas suivants :
 - a) La force d'amortissement vaut 50 fois la vitesse.
 - b) La force d'amortissement vaut 20 fois la vitesse.
 - c) Il n'y a pas de frottement.
3. Quelle valeur de λ correspond au régime critique ? Quelle est alors l'équation horaire $x(t)$ du mouvement et la durée du régime transitoire

Solution

1. Ref d'étude: ref terrestre repère d'espace associé $R(0, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ (l'origine est prise à la position d'équilibre)

Système: la masse - Coordonnées: cartésiennes (x, y) - Base de projection: $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$

Vecteurs cinématiques: $\vec{OM} = x\vec{u}_x$ $\vec{v} = \dot{x}\vec{u}_x$ $\vec{a} = \ddot{x}\vec{u}_x$ ($y=0$)

Bilan des forces:

- Poids: $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_y$
- Réaction du support: $\vec{R} = R\vec{u}_y$ R orthogonale au déplacement car pas de frottements
- Force de rappel du ressort: $\vec{F} = -k(l-l_0)\vec{u}_x = -k(l_0+x-l_0)\vec{u}_x = -kx\vec{u}_x$
- Force de frottement : $\vec{f} = -\lambda \vec{v} = -\lambda \dot{x}\vec{u}_x$

Loi de la quantité de mouvement:

- $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} + \vec{f}$
- Par projection sur les axes: $m\ddot{x} = -kx - \lambda \dot{x}$ (1) et $-mg + R = 0$ (2)
- L'équation (1) conduit à (1'):

$$\ddot{x} + \frac{\lambda}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

2. A l'équation (1') on associe l'équation caractéristique : $r^2 + \frac{\lambda}{m}r + \frac{k}{m}r = 0$. La solution dépend du signe de son

discriminant : $\Delta = \left(\frac{\lambda}{m}\right)^2 - 4\frac{k}{m}$. (par la suite, il est plus simple de raisonner directement sur les applications numériques)

a) $\lambda=50$; $m=5\text{kg}$; $k=80\text{SI}$.

L'équation caractéristique est : $r^2 + \frac{50}{5}r + \frac{80}{5} = 0$ en simplifiant : $r^2 + 10r + 16 = 0$.

$\Delta = (10)^2 - 4 \times 16 = 36 = 6^2 > 0$. **Le régime est apériodique.**

Les racines de l'équation sont $x_1 = \frac{(-10-6)}{2} = -8$ $x_2 = \frac{(-10+6)}{2} = -2$. La solution est du type :

$$x(t) = Ae^{-8t} + Be^{-2t}$$

On détermine A et B grâce aux conditions initiales : $x(0) = 3 = A + B$. On calcule $\dot{x}(t) = -8Ae^{-8t} - 2Be^{-2t}$ d'où : $\dot{x}(0) = 0 = -8A - 2B$. On tire des deux équations précédentes : $A = 4\text{cm} = 0,04\text{ m}$ et $B = -1\text{cm} = -0,01\text{ m}$

Finalement : $x(t) = 0,04e^{-8t} - 0,01e^{-2t}$ ($x(t)$ exprimé en m).

La durée caractéristique du régime transitoire est : $\tau = \frac{1}{2} = 0,5\text{ s}$

b) $\lambda = 20$; $m = 5\text{kg}$; $k = 8\text{SI}$.

L'équation caractéristique est : $r^2 + \frac{20}{5}r + \frac{80}{5} = 0$ en simplifiant : $r^2 + 4r + 16 = 0$. $\Delta = (4)^2 - 4 \times 16 = -48 < 0$.

Le régime est pseudo-périodique.

Les racines de l'équation sont $x_1 = \frac{(-4 - i\sqrt{48})}{2} = -2 - 2\sqrt{3}i = -2 - 3,46i$ $x_2 = -2 + 3,46i$. La solution est du type : $x(t) = e^{-2t} [A \cos(3,46t) + B \sin(3,46t)]$.

On détermine A et B grâce aux conditions initiales : $x(0) = 3 = A$. On calcule

$\dot{x}(t) = -2e^{-2t} [A \cos(3,46t) + B \sin(3,46t)] + e^{-2t} [-3,46A \sin(3,46t) + 3,46B \cos(3,46t)]$ d'où :

$\dot{x}(0) = 0 = -2A + 3,46B$. On tire des deux équations précédentes : $A = 3\text{cm} = 0,03\text{m}$ et $B = 1,7\text{cm} = 0,017\text{m}$

Finalement : **$x(t) = e^{-2t} [0,03 \cos(3,46t) + 0,017 \sin(3,46t)]$** ($x(t)$ exprimé en m)

La durée caractéristique du régime transitoire est : **$\tau = \frac{1}{2} = 0,5\text{s}$**

c) $\lambda = 0$; $m = 5\text{kg}$; $k = 8\text{SI}$.

L'équation différentielle est celle d'un oscillateur harmonique : **$\ddot{x} + 16x = 0$** .

Sa pulsation propre est : $\omega_0 = \sqrt{16} = 4\text{rad.s}^{-1}$. **Le régime est sinusoïdal.**

La solution est du type : $x(t) = [A \cos(4t) + B \sin(4t)]$.

On détermine A et B grâce aux conditions initiales : $x(0) = 3 = A$. On calcule $\dot{x}(t) = -4A \sin(4t) + 4B \cos(4t)$ d'où : $\dot{x}(0) = 0 = 4B$. On tire des deux équations précédentes : $A = 3\text{cm} = 0,03\text{m}$ et $B = 0$

Finalement : **$x(t) = 0,03 \cos(4t)$** ($x(t)$ exprimé en m)

Il n'y a pas de régime transitoire dans ce cas.

3. Le régime critique correspond au cas où $\Delta = \left(\frac{\lambda}{m}\right)^2 - 4\frac{k}{m} = 0$ d'où : $\lambda = 2\sqrt{km} = 2\sqrt{1600} = 40$. L'équation

caractéristique est : $r^2 + \frac{40}{5}r + \frac{80}{5} = 0$ en simplifiant : $r^2 + 8r + 16 = 0$. La racine double est : $x_1 = -4$. La

solution est du type : $x(t) = (A + Bt)e^{-4t}$. On détermine A et B grâce aux conditions initiales : $x(0) = 3 = A$. On calcule $\dot{x}(t) = Be^{-4t} - 4(A + Bt)e^{-4t}$ d'où : $\dot{x}(0) = 0 = B - 4A$. On tire des deux équations précédentes :

$A = 3\text{cm} = 0,03\text{m}$ et $B = 4A = 12\text{cm} = -0,12\text{m}$

Finalement : **$x(t) = 0,01(1 + 4t)e^{-4t}$** ($x(t)$ exprimé en m).

La durée caractéristique du régime transitoire est : **$\tau = \frac{1}{4} = 0,25\text{s}$** . Ce régime correspond au retour le plus rapide à la position d'équilibre.