# Correction ex 2-3-4

## 2. Caractéristiques d'oscillations☺☺

**1.** $\boxed{E_m=\frac{1}{2}m\,v_0^2+\frac{1}{2}k\,x_0^2}$ *Application numérique*: $E_m=\frac{1}{2}\times 0{,}2\times 0{,}2^2+\frac{1}{2}\times 20\times 0{,}02^2$ donc $\boxed{E_m=8{,}00\,mJ}$

**2.** $E_m=\frac{1}{2}k\,X_m^2$ donc $\boxed{X_m=\sqrt{2\frac{E_m}{k}}}$

*Application numérique*: $X_m=\sqrt{\frac{2\times 8.10^{-3}}{20}}$ donc $\boxed{X_m=2{,}83\,cm}$

Lors du passage à la position d'équilibre toute l'énergie mécanique est sous forme d'énergie cinétique : $E_m=\frac{1}{2}m\,v_{max}^2$

donc $\boxed{v_{max}=\sqrt{2\frac{E_m}{m}}}$. **Application numérique:** $v_{max}=\sqrt{\frac{2\times 8.10^{-3}}{0{,}2}}$ donc $\boxed{v_{max}=28{,}3\,cm.s^{-1}}$.

## 3. Oscillations d'une perle ☺☺

*(d'après ENAC 2012)*

**1.** *Ref d'étude:* ref terrestre, *repère d'espace associé:* $R(0,\vec{u_x},\vec{u_y})$

*Système:* perle de masse m, *Coordonnées* :cartésiennes *(x,y)*

*Base de projection*: $(\vec{u_x},\vec{u_y})$, *Vecteurs cinématiques*: $\vec{OM}=x\,\vec{u_x}$ $\vec{v}=\dot{x}\,\vec{u_x}=v\,\vec{u_x}$ $\vec{a}=\ddot{x}\,\vec{u_x}$ *(y=0)*

*Bilan des forces:*

- Poids: $\vec{P}=m\,\vec{g}=-mg\,\vec{u_y}$
- Réaction du support: $\vec{R}=R\,\vec{u_y}$ orthogonale au déplacement car pas de frottements
- Force de Hooke (force de rappel du ressort): $\vec{F}=-k(l-l_0)\vec{u_x}=-k(x-l_0)\vec{u_x}$

*2ème loi de Newton (principe fondamental de la dynamique):*

- $m\vec{a}=\vec{P}+\vec{R}+\vec{F}$
- Par projection sur l'axe ox: $m\ddot{x}=-kx+k\,l_0$ d'où $\boxed{\ddot{x}+\omega_0^2 x=\omega_0^2 l_0}$ avec $\omega_0=\sqrt{k/m}$ la pulsation propre des oscillations.
- La solution est de la forme: $\boxed{x(t)=x_h(t)+x_p(t)=A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t)+l_0}$.

*Exploitation de la première condition initiale :*

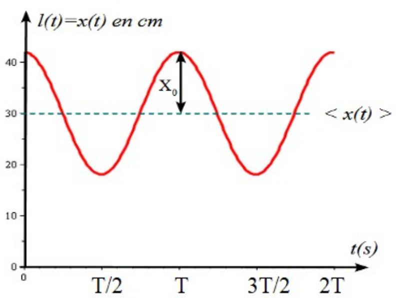
D'après la solution $x(0)=A+l_0$ or $x(0)=l_0+X_0$ donc $A=X_0$.

*Exploitation de la deuxième condition initiale :*On calcule la dérivée de x(t) pour exprimer la vitesse de la masse pour tout t : $\dot{x}(t)=-A\,\omega_0\sin(\omega_0 t)+B\,\omega_0\cos(\omega_0 t)$.

D'après cette équation $\dot{x}(0)=B\,\omega_0$ or $\dot{x}(0)=0$ donc $B=0$. *d'où* $\boxed{x(t)=X_0\cos(\omega_0 t)+l_0}$.

*Applications numériques :* $\omega_0=\sqrt{k/m}=\sqrt{12/0{,}2}=7{,}75\,rad.s^{-1}$ *donc* $\boxed{x(t)=12\cos(7{,}75\,t)+30\,cm}$.

**2.** *Représentation graphique sur 2 périodes:*




La période des oscillations est : $T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}=0{,}81\,s$

L'amplitude des oscillations est $X_0=12\,cm$.

La valeur moyenne est $<x(t)>=30\,cm$

**3.** La bille n'est soumise qu'à des forces conservatives. Son énergie mécanique

$E_m=E_c+E_p=\frac{1}{2}m\,v^2+\frac{1}{2}k(l-l_0)^2$ est constante au cours du mouvement on ne tient pas compte de l'énergie potentielle de pesanteur constante au cours du mouvement. Quand la perle passe par la position d'équilibre toute son énergie mécanique est sous forme d'énergie cinétique donc $E_c = E_m(t=0) = \frac{1}{2} k X_0^2$ .

*Application numérique :* $\boxed{E_c = \frac{1}{2} \times 12 \times 0{,}12^2 = 86{,}4\, mJ}$.

**4.** *Ref d'étude:* ref terrestre, *repère d'espace associé:* $R(0, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$

*Système:* perle de masse m, *Coordonnées* :cartésiennes *(x,y)*

*Base de projection*: $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$ , *Vecteurs cinématiques*: $\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x$ $\vec{v} = \dot{x}\vec{u}_x = v\vec{u}_x$ $\vec{a} = \ddot{x}\vec{u}_x = a\vec{u}_x$ *(y=0)*

*Bilan des forces:*

- Poids: $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_y$
- Réaction du support: $\vec{R} = R\vec{u}_y$ orthogonale au déplacement car pas de frottements
- Force de Hooke (force de rappel du ressort): $\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}_x = -k(x - l_0)\vec{u}_x$
- Force $\overrightarrow{F_{op}} = F\,\vec{u}_x$

*2ème loi de Newton (principe fondamental de la dynamique):*

- $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} + \overrightarrow{F_{op}}$
- Par projection sur l'axe ox: $m\ddot{x} = -kx + kl_0 + F$ d'où $\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 l_0 + \frac{F}{m}}$ avec $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ la pulsation propre des oscillations.
- La solution est de la forme: $\boxed{x(t) = x_h(t) + x_p(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + l_0 + \frac{F}{m\omega_0^2}}$.

*Exploitation de la première condition initiale :*

D'après la solution $x(0) = A + l_0 + \frac{F}{m\omega_0^2}$ or $x(0) = l_0$ donc $A = -\frac{F}{m\omega_0^2}$ .

*Exploitation de la deuxième condition initiale :*On calcule la dérivée de x(t) pour exprimer la vitesse de la masse pour tout t : $\dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t)$ .

D'après cette équation $\dot{x}(0) = B\omega_0$ or $\dot{x}(0) = 0$ donc $B = 0$ . *d'où* $\boxed{x(t) = \frac{F}{m\omega_0^2}(1 - \cos(\omega_0 t)) + l_0}$ .or $m\omega_0^2 = k$ d'où $\boxed{x(t) = \frac{F}{k}(1 - \cos(\omega_0 t)) + l_0}$ **Rép A.**

**5.** $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} k(x - l_0)^2 = \frac{1}{2} m \frac{F^2\omega_0^2}{k^2} \sin^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2} k \frac{F^2}{k^2}(1 - \cos(\omega_0 t))^2$ or $\frac{\omega_0^2}{k} = \frac{1}{m}$ d'où

$E_m = \frac{1}{2}\frac{F^2}{k}(\sin^2(\omega_0 t) + (1 - \cos(\omega_0 t))^2) = \frac{1}{2}\frac{F^2}{k}(2 - 2\cos(\omega_0 t))$ d'où $\boxed{E_m = \frac{F^2}{k}(1 - \cos(\omega_0 t))}$ . **Rép B.**

**6.** A partir du moment où l'on supprime la force , l'énergie mécanique se conserve. Lorsque le ressort est tiré au maximum , l' énergie cinétique de la perle est nulle d'où $\boxed{E_m = \frac{F^2}{k}(1 - \cos(\omega_0 \tau)) = \frac{1}{2} k X_m^2}$ d'où

$\boxed{X_m^2 = \frac{2F^2}{k^2}(1 - \cos(\omega_0 \tau))}$ d'où $\boxed{X_m = \frac{F}{k}\sqrt{2(1 - \cos(\omega_0 \tau))}}$. or cos 2x = cos²x-sin²x = 1-2 sin²x d'où

$\boxed{X_m = \frac{F}{k}\sqrt{4\sin^2(\frac{\omega_0 \tau}{2})} = \frac{2F}{k}\left|\sin(\frac{\omega_0 \tau}{2})\right|}$. **Rép C.**

**7.** L'amplitude des oscillations est maximale quand $\sin(\frac{\omega_0 \tau}{2}) = 1$ soit pour la plus petite valeur de τ : $\frac{\omega_0 \tau}{2} = \frac{\pi}{2}$ . D'où

$$\boxed{\tau=\frac{\pi}{\omega_0}=\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=\pi\sqrt{\frac{0{,}2}{12}}=0{,}4\,s}$$ . **Rép A.**

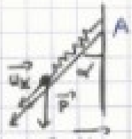
**8.** La force $\vec{F}$ est une force constante donc $W_{\vec{F}}(x(0)\rightarrow x(\tau))=F\times[x(\tau)-x(0)]=\frac{F\times F}{k}(1-\cos(\omega_0\tau))$ or $\omega_0\tau=\pi$ d'où $\boxed{W_{\vec{F}_{op}}=\frac{2F^2}{k}}$ .**Rép C.**

**9.** Lors de frottement fluides les oscillations par rapport à la position d'équilibre sont régis par une quation du type : $\ddot{x}+\frac{\omega_0}{Q}\dot{x}+\omega_0^2 x=0$ . Cette fois-ci $x= l-l_0$. La solution est du type : $x(t)=A e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\cos(\omega t+\phi)$ . Le nombre d'oscillations étant important, on peut confondre pulsation propre et pseudo-pulsation. Ainsi pour t = 25 $T_0$ , $e^{-\frac{\omega_0}{2Q}25T_0}=\frac{1}{2}$ soit $\frac{\omega_0}{2Q}25T_0=\ln 2$ or $\omega_0 T_0=2\pi$ d'où $\boxed{Q=\frac{25\pi}{\ln 2}=113\approx 110}$ .

## 4. Oscillateur oblique ☺☺

Oscillateur oblique

1 Ref : Laboratoire Système : bille repère d'espace $(A\vec{X})$



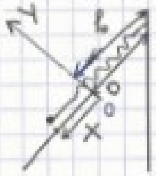

Bilan des forces : $\vec{P}$ , $\vec{R}$ , $\vec{F}$ (force de rappel du ressort)

Le système est à l'équilibre donc $\vec{P}+\vec{R}+\vec{F}=\vec{0} \Rightarrow \vec{P}\cdot\vec{u}_x+\vec{R}\cdot\vec{u}_x+\vec{F}\cdot\vec{u}_x=0$ (1)

$\vec{P}\cdot\vec{u}_x = mg\cos\alpha$ $\vec{R}\cdot\vec{u}_x=\vec{0}$ car il n'y a pas de frottements.

$\vec{F}\cdot\vec{u}_x=-k(l_e-l_0)$ (1) $\Rightarrow$ $\boxed{l_e=l_0+\frac{mg\cos\alpha}{k}}$

2a) On choisit l'origine de l'axe AX au niveau de la position d'équilibre de la bille. Ref : Laboratoire. Système : bille




Repère d'espace $(O,\vec{u}_x)$

Bilan des forces : $\vec{P}$ , $\vec{R}$ , $\vec{F}$

D'après la RFD : $m\vec{a}=\vec{P}+\vec{R}+\vec{F}$

$\Rightarrow m\vec{a}\cdot\vec{u}_x=\vec{P}\cdot\vec{u}_x+\vec{R}\cdot\vec{u}_x+\vec{F}\cdot\vec{u}_x$ (1)

$\vec{P}\cdot\vec{u}_x=mg\cos\alpha$ $\vec{R}\cdot\vec{u}_x=0$ $\vec{F}\cdot\vec{u}_x=-k(l-l_0)$ $=-k(l_e+X-l_0)$

$\Rightarrow$ de plus $m\vec{a}\cdot\vec{u}_x=m\ddot{X}$ donc (1) $\Rightarrow m\ddot{x}=mg\cos\alpha-k\left[l_0+\frac{mg\cos\alpha}{k}+X-l_0\right]$

$\Rightarrow m\ddot{x}+kX=0$ c'est l'équation d'un oscillateur harmonique du type :

$$\boxed{\ddot{X}+\omega_0^2X=0 \quad \text{avec} \quad \omega_0^2=\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

b) La solution de l'équation est du type $X(t)=A\cos\omega_0 t+B\sin\omega_0 t$

A $t=0$ $X=X_0 \Rightarrow A=X_0$ . A $t=0$ $\dot{X}_0=0 \Rightarrow B=0$

$\Rightarrow X(t)=\boxed{A\cos\omega_0 t}$

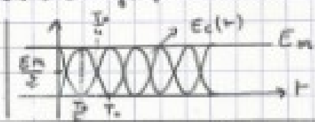
c) $E_c=\frac{1}{2}mv^2$ $v=\dot{X}=-A\omega_0\sin\omega_0 t \Rightarrow E_c=\frac{1}{2}A^2\omega_0^2 m\sin^2\omega_0 t$

Suivant l'axe OY $\perp$ OX le bilan des forces est nul. Suivant OX

Le bilan des forces est : $\vec{P}\cdot\vec{u}_x+\vec{F}\cdot\vec{u}_x=-kX$

$\Rightarrow \vec{F}_{TOT}=-kX\vec{u}_x$ cette force dérive de l'énergie potentielle

$E_p(x)=\frac{1}{2}kX^2+K$ (on pose $K=0$)




$\Rightarrow E_p(t)=\frac{1}{2}kA^2\cos^2\omega_0 t$

d) $E_m=E_c+E_p=\frac{1}{2}A^2(\omega_0^2 m\sin^2\omega_0 t+k\cos^2\omega_0 t)$ or $\omega_0^2 m=k$

$\Rightarrow E_m=\frac{1}{2}kA^2$ . $\langle E_c\rangle=\frac{1}{4}kA^2$ et $\langle E_p\rangle=\frac{1}{4}kA^2$ $|\langle\sin^2\omega_0 t\rangle$.

$\Rightarrow \langle E_c\rangle=\langle E_p\rangle=\frac{E_m}{2}$ il y a équipartition de l'énergie

## 6. Influence de l'amortissement ☺☺

**1.** *Ref d'étude:* ref terrestre repère d'espace associé $R(0, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ *(l'origine est prise à la position d'équilibre)*

*Systéme:* la masse - *Coordonnées* :cartésiennes *(x,y)* - *Base de projection*: $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$

*Vecteurs cinématiques*: $\vec{OM} = x\vec{u}_x \quad \vec{v} = \dot{x}\vec{u}_x \quad \vec{a} = \ddot{x}\vec{u}_x \quad (y=0)$

*Bilan des forces:*

- Poids: $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_y$
- Réaction du support: $\vec{R} = R\vec{u}_y$ R orthogonale au déplacement car pas de frottements
- Force de rappel du ressort: $\vec{F} = -k(l-l_0)\vec{u}_x = -k(l_0+x-l_0)\vec{u}_x = -kx\vec{u}_x$
- Force de frottement : $\vec{f} = -\lambda\vec{v} = -\lambda\dot{x}\vec{u}_x$

*Loi de la quantité de mouvement:*

- $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} + \vec{f}$
- Par projection sur les axes: $m\ddot{x} = -kx - \lambda\dot{x}$ (1) et -mg+R=0 (2)
- L'équation (1) conduit à (1'): $\boxed{\ddot{x} + \frac{\lambda}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0}$.

**2.** A l'équation (1' ) on associe l'équation caractéristique : $r^2 + \frac{\lambda}{m}r + \frac{k}{m}r = 0$. La solution dépend du signe de son discriminant : $\Delta = (\frac{\lambda}{m})^2 - 4\frac{k}{m}$. *(par la suite, il est plus simple de raisonner directement sur les applications numériques)*

**a)** $\lambda = 50$ ; m=5kg ; k=8SI.

L'équation caractéristique est : $r^2 + \frac{50}{5}r + \frac{80}{5} = 0$ en simplifiant : $r^2 + 10r + 16 = 0$.

$\Delta = (10)^2 - 4\times 16 = 36 = 6^2 > 0$. **Le régime est apériodique.**

Les racines de l'équation sont $x_1 = \frac{(-10-6)}{2} = -8 \quad x_2 = \frac{(-10+6)}{2} = -2$. La solution est du type : $x(t) = Ae^{-8t} + Be^{-2t}$.

On détermine A et B grâce aux conditions initiales : $x(0) = 3 = A + B$. On calcule $\dot{x}(t) = -8Ae^{-8t} - 2Be^{-2t}$ d'où : $\dot{x}(0) = 0 = -8A - 2B$. On tire des deux équations précédentes : $A = 4cm = 0{,}04m$ et $B = -1cm = -0{,}01m$

Finalement : $\boxed{x(t) = 0{,}04e^{-8t} - 0{,}01e^{-2t}}$ *(x(t)* exprimé en m).

La durée caractéristique du régime transitoire est : $\boxed{\tau = \frac{1}{2} = 0{,}5s}$

**b)** $\lambda = 20$ ; m=5kg ; k=8SI.

L'équation caractéristique est : $r^2 + \frac{20}{5}r + \frac{80}{5} = 0$ en simplifiant : $r^2 + 4r + 16 = 0$. $\Delta = (4)^2 - 4\times 16 = -48 < 0$.

**Le régime est pseudo-périodique.**

Les racines de l'équation sont $x_1 = \frac{(-4 - i\sqrt{48})}{2} = -2 - 2\sqrt{3}i = -2 - 3{,}46i \quad x_2 = -2 + 3{,}46i$. La solution est du type : $x(t) = e^{-2t}[A\cos(3{,}46t) + B\sin(3{,}46t)]$.

On détermine A et B grâce aux conditions initiales : $x(0) = 3 = A$. On calcule
$\dot{x}(t) = -2e^{-2t}[A\cos(3{,}46t) + B\sin(3{,}46t)] + e^{-2t}[-3{,}46A\sin(3{,}46t) + 3{,}46B\cos(3{,}46t)]$ d'où :
$\dot{x}(0) = 0 = -2A + 3{,}46B$. On tire des deux équations précédentes : $A = 3cm = 0{,}03m$ et $B = 1{,}7cm = 0{,}017m$

Finalement : $\boxed{x(t) = e^{-2t}[0{,}03\cos(3{,}46t) + 0{,}017\sin(3{,}46t)]}$ *(x(t)* exprimé en m)

La durée caractéristique du régime transitoire est : $\boxed{\tau = \frac{1}{2} = 0{,}5s}$

**c)** $\lambda = 0$ ; m=5kg ; k=8SI.

L'équation différentielle est celle d'un oscillateur harmonique : $\boxed{\ddot{x}+16x=0}$ .

Sa pulsation propre est : $\omega_0=\sqrt{16}=4\,rad.s^{-1}$ . **Le régime est sinusoïdal.**

La solution est du type : $x(t)=[A\cos(4t)+B\sin(4t)]$ .

On détermine A et B grâce aux conditions initiales : $x(0)=3=A$ . On calcule $\dot{x}(t)=-4A\sin(4t)+4B\cos(4t)$ d'où : $\dot{x}(0)=0=4\mathrm{B}$ . On tire des deux équations précédentes : $A=3\mathrm{cm}=0{,}03\,m$ et $B=0$

Finalement : $\boxed{x(t)=0{,}03\cos(4t)}$ (*x(t)* exprimé en m)

Il n'y a pas de régime transitoire dans ce cas.

**3.** Le régime critique correspond au cas où $\Delta=(\frac{\lambda}{m})^2-4\frac{k}{m}=0$ d'où : $\lambda=2\sqrt{km}=2\sqrt{1600}=40$ . L'équation caractéristique est : $r^2+\frac{40}{5}r+\frac{80}{5}=0$ en simplifiant : $r^2+8r+16=0$ . La racine double est : $x_1=-4$ . La solution est du type : $x(t)=(A+Bt)e^{-4t}$ .On détermine A et B grâce aux conditions initiales : $x(0)=3=A$ . On calcule $\dot{x}(t)=Be^{-4t}-4(A+Bt)e^{-4t}$ d'où : $\dot{x}(0)=0=B-4\mathrm{A}$ . On tire des deux équations précédentes : $A=3\mathrm{cm}=0{,}03\,m$ et $B=4\mathrm{A}=12\mathrm{cm}=-0{,}12\,m$

Finalement : $\boxed{x(t)=0{,}01(1+4t)e^{-4t}}$ (*x(t)* exprimé en m).

La durée caractéristique du régime transitoire est : $\boxed{\tau=\frac{1}{4}=0{,}25\,s}$. Ce régime correspond au retour le plus rapide à la position d'équilibre.