

6. Association de 2 ressorts verticaux ☺☺☺

1) Forces exercées sur M dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

- poids : $m \vec{g} = -mg \vec{e}_x$

- force de rappel du ressort (1) : $\vec{T}_1 = -k_1 \cdot (l_1 - l_0) \cdot \vec{e}_x = -k_1 \cdot (x - l_0) \cdot \vec{e}_x$

- force de rappel du ressort (2) : $\vec{T}_2 = -k_2 \cdot (l_2 - l_0) \cdot (-\vec{e}_x) = +k_2 \cdot ((2l_0 - x) - l_0) \cdot \vec{e}_x = -k_2 \cdot (x - l_0) \cdot \vec{e}_x$

2.a) Le PFD s'écrit : $m \overline{a_{M/\mathcal{R}_T}} = m \vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2$

Soit, en projection selon $\vec{e}_x$: $\begin{cases} \text{hors équilibre} & m\ddot{x} = -mg - (k_1 + k_2) \cdot (x - l_0) & \textcircled{1} \\ \text{à l'équilibre} & 0 = -mg - (k_1 + k_2) \cdot (x_{\text{eq}} - l_0) & \textcircled{2} \end{cases}$

La relation ② donne : $x_{\text{eq}} = l_0 - \frac{mg}{k_1 + k_2}$

2.b) En effectuant ① - ②, on obtient : $m\ddot{x} = -(k_1 + k_2) \cdot (x - x_{\text{eq}})$

Soit : $\xrightarrow{X=x-x_{\text{eq}}} \ddot{X} + \frac{k_1 + k_2}{m} \cdot X = 0 \Leftrightarrow \boxed{\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0}$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$

3) $\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_{p_g} + \mathcal{E}_{p_{el_1}} + \mathcal{E}_{p_{el_2}} = mgx + \frac{1}{2}k_1 \cdot (l_1 - l_0)^2 + \frac{1}{2}k_2 \cdot (l_2 - l_0)^2 + \text{Cte}$

Soit : $\boxed{\mathcal{E}_p = mgx + \frac{1}{2} \cdot (k_1 + k_2) \cdot (x - l_0)^2 + \text{Cte}}$

4.a) Pour trouver la position d'équilibre on pose :

$$\left(\frac{d\mathcal{E}_p}{dx} \right)_{x_{\text{eq}}} = \begin{cases} 0 \\ (k_1 + k_2) \cdot (x_{\text{eq}} - l_0) + mg \end{cases} \Rightarrow \boxed{x_{\text{eq}} = l_0 - \frac{mg}{k_1 + k_2}}$$

4.b) En dérivant une seconde fois, on établit que l'équilibre est stable puisque :

$$\boxed{\left(\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2} \right)_{x_{\text{eq}}} = k_1 + k_2 > 0}$$

4.c) Pour établir l'équation du mouvement, on applique le théorème de la puissance mécanique :

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = \frac{d\mathcal{E}_k + \mathcal{E}_p}{dt} = \begin{cases} \mathcal{P}_{NC} = 0 \\ m \cdot \dot{x} \cdot \ddot{x} + (k_1 + k_2) \cdot \dot{x} \cdot (x - l_0) + mg\dot{x} \end{cases} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k_1 + k_2}{m} \cdot (x - l_0) + \textcolor{red}{g} = 0$$

On retrouve : $\boxed{\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0}$

5) La solution est de la forme : $X = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$

La dérivée est : $\dot{X} = -X_m \cdot \omega_0 \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi)$.

Les conditions initiales donnent :

$$\begin{cases} X(0) = X_m \cos(\varphi) = x_0 - x_{\text{eq}} \\ \dot{X}(0) = -X_m \omega_0 \sin(\varphi) = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x(t) = x_{\text{eq}} + (x_0 - x_{\text{eq}}) \cdot \cos(\omega_0 t)}$$

7. Influence de l'amortissement ☺☺

1. Ref d'étude: ref terrestre repère d'espace associé $R(0, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ (l'origine est prise à la position d'équilibre)

Système: la masse - Coordonnées: cartésiennes (x, y) - Base de projection: $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$

Vecteurs cinématiques: $\vec{OM} = x \vec{u}_x$ $\vec{v} = \dot{x} \vec{u}_x$ $\vec{a} = \ddot{x} \vec{u}_x$ ($y=0$)

Bilan des forces:

- Poids: $\vec{P} = m \vec{g} = -m g \vec{u}_y$
- Réaction du support: $\vec{R} = R \vec{u}_y$ R orthogonale au déplacement car pas de frottements
- Force de rappel du ressort: $\vec{F} = -k(l - l_0) \vec{u}_x = -k(l_0 + x - l_0) \vec{u}_x = -kx \vec{u}_x$
- Force de frottement: $\vec{f} = -\lambda \vec{v} = -\lambda \dot{x} \vec{u}_x$

Loi de la quantité de mouvement:

- $m \vec{a} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} + \vec{f}$
- Par projection sur les axes: $m \ddot{x} = -kx - \lambda \dot{x}$ (1) et $-mg + R = 0$ (2)

- L'équation (1) conduit à (1'):
- $$\ddot{x} + \frac{\lambda}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

2. A l'équation (1') on associe l'équation caractéristique: $r^2 + \frac{\lambda}{m} r + \frac{k}{m} r = 0$. La solution dépend du signe de son

discriminant: $\Delta = \left(\frac{\lambda}{m}\right)^2 - 4 \frac{k}{m}$. (par la suite, il est plus simple de raisonner directement sur les applications numériques)

a) $\lambda = 50$; $m = 5 \text{ kg}$; $k = 8 \text{ SI}$.

L'équation caractéristique est: $r^2 + \frac{50}{5} r + \frac{80}{5} = 0$ en simplifiant: $r^2 + 10r + 16 = 0$.

$\Delta = (10)^2 - 4 \times 16 = 36 = 6^2 > 0$. **Le régime est apériodique.**

Les racines de l'équation sont $x_1 = \frac{(-10-6)}{2} = -8$ $x_2 = \frac{(-10+6)}{2} = -2$. La solution est du type:

$$x(t) = A e^{-8t} + B e^{-2t}.$$

On détermine A et B grâce aux conditions initiales: $x(0) = 3 = A + B$. On calcule $\dot{x}(t) = -8A e^{-8t} - 2B e^{-2t}$ d'où: $\dot{x}(0) = 0 = -8A - 2B$. On tire des deux équations précédentes: $A = 4 \text{ cm} = 0,04 \text{ m}$ et $B = -1 \text{ cm} = -0,01 \text{ m}$

Finalement: $x(t) = 0,04 e^{-8t} - 0,01 e^{-2t}$ ($x(t)$ exprimé en m).

La durée caractéristique du régime transitoire est: $\tau = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ s}$

b) $\lambda = 20$; $m = 5 \text{ kg}$; $k = 8 \text{ SI}$.

L'équation caractéristique est: $r^2 + \frac{20}{5} r + \frac{80}{5} = 0$ en simplifiant: $r^2 + 4r + 16 = 0$. $\Delta = (4)^2 - 4 \times 16 = -48 < 0$.

Le régime est pseudo-périodique.

Les racines de l'équation sont $x_1 = \frac{(-4-i\sqrt{48})}{2} = -2 - 2\sqrt{3}i = -2 - 3,46i$ $x_2 = -2 + 3,46i$. La solution est du

type: $x(t) = e^{-2t} [A \cos(3,46t) + B \sin(3,46t)]$.

On détermine A et B grâce aux conditions initiales: $x(0) = 3 = A$. On calcule

$\dot{x}(t) = -2 e^{-2t} [A \cos(3,46t) + B \sin(3,46t)] + e^{-2t} [-3,46 A \sin(3,46t) + 3,46 B \cos(3,46t)]$ d'où:

$\dot{x}(0) = 0 = -2A + 3,46B$. On tire des deux équations précédentes: $A = 3 \text{ cm} = 0,03 \text{ m}$ et $B = 1,7 \text{ cm} = 0,017 \text{ m}$

Finalement: $x(t) = e^{-2t} [0,03 \cos(3,46t) + 0,017 \sin(3,46t)]$ ($x(t)$ exprimé en m)

La durée caractéristique du régime transitoire est: $\tau = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ s}$

c) $\lambda = 0$; $m = 5 \text{ kg}$; $k = 8 \text{ SI}$.

L'équation différentielle est celle d'un oscillateur harmonique : $\ddot{x} + 16x = 0$.

Sa pulsation propre est : $\omega_0 = \sqrt{16} = 4 \text{ rad.s}^{-1}$. Le régime est sinusoïdal.

La solution est du type : $x(t) = [A \cos(4t) + B \sin(4t)]$.

On détermine A et B grâce aux conditions initiales : $x(0) = 3 = A$. On calcule $\dot{x}(t) = -4A \sin(4t) + 4B \cos(4t)$ d'où : $\dot{x}(0) = 0 = 4B$. On tire des deux équations précédentes : $A = 3 \text{ cm} = 0,03 \text{ m}$ et $B = 0$

Finalement : $x(t) = 0,03 \cos(4t)$ ($x(t)$ exprimé en m)

Il n'y a pas de régime transitoire dans ce cas.

3. Le régime critique correspond au cas où $\Delta = \left(\frac{\lambda}{m}\right)^2 - 4 \frac{k}{m} = 0$ d'où : $\lambda = 2\sqrt{km} = 2\sqrt{1600} = 40$. L'équation

caractéristique est : $r^2 + \frac{40}{5}r + \frac{80}{5} = 0$ en simplifiant : $r^2 + 8r + 16 = 0$. La racine double est : $x_1 = -4$. La

solution est du type : $x(t) = (A + Bt)e^{-4t}$. On détermine A et B grâce aux conditions initiales : $x(0) = 3 = A$. On calcule $\dot{x}(t) = Be^{-4t} - 4(A + Bt)e^{-4t}$ d'où : $\dot{x}(0) = 0 = B - 4A$. On tire des deux équations précédentes :

$A = 3 \text{ cm} = 0,03 \text{ m}$ et $B = 4A = 12 \text{ cm} = 0,12 \text{ m}$

Finalement : $x(t) = 0,01(1 + 4t)e^{-4t}$ ($x(t)$ exprimé en m).

La durée caractéristique du régime transitoire est : $\tau = \frac{1}{4} = 0,25 \text{ s}$. Ce régime correspond au retour le plus rapide à la position d'équilibre.

8. Mesure du coefficient de viscosité de la glycérine ☺☺

1. Ref d'étude: ref terrestre repère d'espace associé $R(O, \vec{u}_z)$

Système: la masse. Coordonnées: cartésiennes (z). Base de projection: $(\vec{u}_z)$

Bilan des forces:

- Poids : $\vec{P} = m \vec{g} = m g \vec{u}_z = \rho \frac{4}{3} \pi r^3 g \vec{u}_z$
- Force de rappel du ressort: $\vec{F} = -k(z_{eq} - l_0) \vec{u}_z$
- La poussée d'Archimède : $\vec{\Pi}_A = -\rho_0 \frac{4}{3} \pi r^3 g \vec{u}_z$
- La force de frottement est nulle à l'équilibre.

Loi de la quantité de mouvement à l'équilibre: $\vec{P} + \vec{F} + \vec{\Pi}_A = \vec{0}$

Par projection sur l'axe Oz : $\rho \frac{4}{3} \pi r^3 g - k(z_{eq} - l_0) - \rho_0 \frac{4}{3} \pi r^3 g = 0$ d'où: $z_{eq} = l_0 + \frac{4}{3} \pi r^3 \frac{g}{k} (\rho - \rho_0)$

2. On étudie maintenant la masse hors équilibre.

Vecteurs cinématiques: $\vec{v} = \dot{z} \vec{u}_z$; $\vec{a} = \ddot{z} \vec{u}_z$

Bilan des forces:

- Poids : $\vec{P} = m \vec{g} = m g \vec{u}_z = \rho \frac{4}{3} \pi r^3 g \vec{u}_z$
- Force de rappel du ressort: $\vec{F} = -k(z - l_0) \vec{u}_z$
- La poussée d'Archimède : $\vec{\Pi}_A = -\rho_0 \frac{4}{3} \pi r^3 g \vec{u}_z$
- La force de frottement : $\vec{f} = -6\pi\eta r \vec{v} = -6\pi\eta r \dot{z} \vec{u}_z$

Loi de la quantité de mouvement à l'équilibre: $\vec{P} + \vec{F} + \vec{\Pi}_A + \vec{f} = m \ddot{z} \vec{u}_z$

Par projection sur l'axe Oz : $\rho \frac{4}{3} \pi r^3 g - k(z - l_0) - \rho_0 \frac{4}{3} \pi r^3 g - 6\pi\eta r \dot{z} = m \ddot{z}$ d'où :

$$m \ddot{z} + 6\pi\eta r \dot{z} + kz = \rho \frac{4}{3} \pi r^3 g + kl_0 - \rho_0 \frac{4}{3} \pi r^3 g \quad (1)$$

3. On pose $Z = z - z_{eq}$

3.1. Ainsi : $z = Z + l_0 + \frac{4}{3} \pi r^3 \frac{g}{k} (\rho - \rho_0)$; $\dot{z} = \dot{Z}$ et $\ddot{z} = \ddot{Z}$. On remplace dans l'équation (1) :

$$m \ddot{Z} + 6\pi\eta r \dot{Z} + k(Z + l_0 + \frac{4}{3} \pi r^3 \frac{g}{k} (\rho - \rho_0)) = \rho \frac{4}{3} \pi r^3 g + kl_0 - \rho_0 \frac{4}{3} \pi r^3 g.$$

Après simplification : $m \ddot{Z} + 6\pi\eta r \dot{Z} + kZ = 0$. Cette équation écrite sous sa forme canonique est :

$$\ddot{Z} + \frac{6\pi\eta r}{m} \dot{Z} + \frac{k}{m} Z = 0.$$

Par identification : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{6\pi\eta r}{m}$ d'où $Q = m \frac{\omega_0}{6\pi\eta r} = \frac{\sqrt{k m}}{6\pi\eta r}$

3.2. Pour résoudre l'équation précédente, on lui associe l'équation caractéristique : $u^2 + \frac{6\pi\eta r}{m} u + \frac{k}{m} = 0$. Le régime

est pseudo périodique si son discriminant est négatif soit : $\left(\frac{6\pi\eta r}{m}\right)^2 - \frac{4k}{m} < 0$ soit : $\eta < \frac{\sqrt{k m}}{3\pi r}$.

La pseudo-pulsation est : $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$.

3.3.

a) On déduit $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{9\pi^2 \eta^2 r^2}{km}}$ d'où $T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{9\pi^2 \eta^2 r^2}{m\omega_0^2}}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{9T_0^2 \eta^2 r^2}{4m^2}}}$ soit $T^2 \left(1 - \frac{9T_0^2 \eta^2 r^2}{4m^2}\right) = T_0^2$ d'où

$$1 - \frac{9T_0^2 \eta^2 r^2}{4m^2} = \frac{T_0^2}{T^2} \text{ d'où } \frac{9T_0^2 \eta^2 r^2}{4m^2} = 1 - \frac{T_0^2}{T^2} \text{ d'où } \eta = \frac{2m}{3r} \sqrt{\frac{1}{T_0^2} - \frac{1}{T^2}}.$$

Or $m = \rho \frac{4}{3} \pi r^3$ d'où : $\eta = \frac{8}{9} \rho \pi r^2 \sqrt{\frac{1}{T_0^2} - \frac{1}{T^2}}$. La détermination de T et T₀ permet d'accéder à η.

b) $3T_0 = 1,1$ D'où $T_0 = 0,367s$, $T = 0,4s$

D'où $\eta = \frac{8}{9} 7800 \pi (5.10^{-3})^2 \sqrt{\frac{1}{0,367^2} - \frac{1}{0,4^2}} = 0,655 SI$

9. Vibrations d'un moteur ☺☺

Vibrations d'un moteur

1) Système : moteur de masse m , Ref. supposé galiléen, repère d'espace $(0, \vec{u}_3)$

Bilan des forces : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_3$

Force de Hooke : $\vec{T} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}_3$

Freinage : $\vec{f} = -\alpha \frac{dz}{dt} \vec{u}_3 = \vec{0}$ car on est à l'équilibre

2ème loi de Newton à l'équilibre : $\vec{P} + \vec{T} = \vec{0}$

$\Rightarrow -mg\vec{u}_3 - k(\ell_{eq} - \ell_0)\vec{u}_3 = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\ell_{eq} = \ell_0 - \frac{mg}{k}}$

2) A partir de cette question, le point O correspond à la position d'équilibre du ressort :

$\ell = \ell_{eq} + z$

L'accélération s'écrit : $\vec{a} = \ddot{z}\vec{u}_3$

Le bilan des forces est le même que dans la question 1)

La 2ème loi de Newton s'écrit : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{f}$

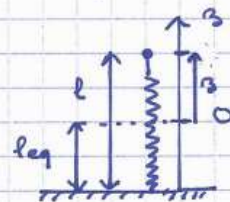
Par projection sur $\vec{u}_3$: $m\ddot{z} = -mg - k(\ell_{eq} + z - \ell_0) - \alpha\dot{z}$

$\Rightarrow m\ddot{z} = -mg - k\left(\ell_0 - \frac{mg}{k} + z - \ell_0\right) - \alpha\dot{z}$

$\Rightarrow \boxed{\ddot{z} + \frac{\alpha}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = 0}$. Cette équation est de la forme :

$\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{z} + \omega_0^2 z = 0$, par identification : $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{\alpha}{m}$ et $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

$\Rightarrow \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ et } Q = \frac{m\omega_0}{\alpha} = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}}$



22) Pour résoudre l'équation, on lui associe l'équation caractéristique : $x^2 + \frac{\omega_0}{Q}x + \omega_0^2 = 0$

$\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2\left(\frac{1}{4Q^2} - 1\right) < 0$ car $Q > \frac{1}{2}$

on pose $\delta = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$. Les solutions de l'équation sont :

$x_1 = \frac{-\omega_0}{2Q} - i\delta$ et $x_2 = \frac{-\omega_0}{2Q} + i\delta$.

d'où $z(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \left(A \cos\left(\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} t\right) + B \sin\left(\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} t\right) \right)$
ce régime est pseudo-périodique

23 Au bilan des forces on rajoute $\vec{F} = F_0 \cos \omega t \vec{u}_3$

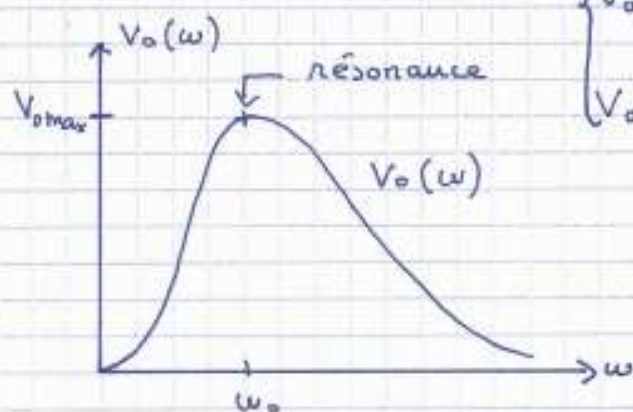
L'équation devient : $\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$

32) A $F_0 \cos \omega t$ on associe $\underline{F} = F_0$. A l'équation de la question 31, on associe l'équation complexe en considérant que dériver revient à multiplier par $j\omega$ et intégrer à diviser par $j\omega$: $j\omega \underline{V} \frac{\omega_0}{Q} + \frac{\omega_0^2}{j\omega} \underline{V} = \frac{F_0}{m}$
 $\Rightarrow \underline{V} \left(\frac{\omega_0}{Q} + j \left(\omega - \frac{\omega_0^2}{\omega} \right) \right) = \frac{F_0}{m}$

$$\Rightarrow \underline{V} = \frac{F_0/m}{\frac{\omega_0}{Q} + j \left(\omega - \frac{\omega_0^2}{\omega} \right)}$$

En prenant le module: $V_0 = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 + \left(\omega - \frac{\omega_0^2}{\omega}\right)^2}}$

$\lim_{\omega \rightarrow 0} V_0 = 0$ $\lim_{\omega \rightarrow \infty} V_0 = 0$ $\begin{cases} V_0 \text{ est max pour } \omega = \omega_0 \\ V_{0\max} = \frac{F_0/m}{\omega_0} \times Q = \frac{F_0/m}{\sqrt{k_1}} \times \frac{\sqrt{k_1}}{\alpha} \sqrt{m} \\ V_{0\max} = \frac{F_0}{\alpha} \end{cases}$

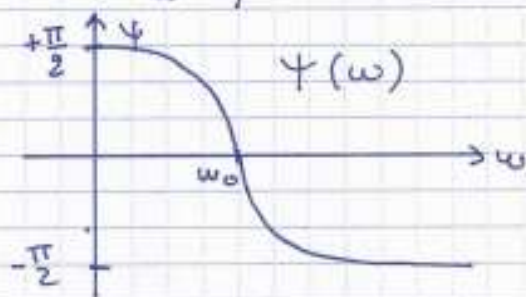


33) $\Psi(\omega) = \arg \underline{V}(\omega) = \arg F_0/m - \arg \left(\frac{\omega_0}{Q} + j \left(\omega - \frac{\omega_0^2}{\omega} \right) \right)$

$\Rightarrow \Psi(\omega) = \arg \left[\frac{\omega_0}{Q} + j \left(\frac{\omega_0^2}{\omega} - \omega \right) \right]$

$\cos \Psi > 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < \Psi < +\frac{\pi}{2}$

$\tan \Psi = Q \left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right)$



$\begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow 0} \tan \Psi = +\infty \\ \Rightarrow \Psi \rightarrow +\frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \tan \Psi = -\infty \\ \Rightarrow \Psi \rightarrow -\frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} \tan \Psi = 0 \text{ pour } \omega = \omega_0 \\ \Rightarrow \Psi = 0 \end{cases}$

34) Pour $k_1 = 4 \cdot 10^6 \text{ N.m}^{-1}$ $\omega_{0,1} = \sqrt{\frac{k_1}{m}} = 632 \text{ rad.s}^{-1}$

Pour $k_2 = 10^6 \text{ N.m}^{-1}$ $\omega_{0,2} = \sqrt{\frac{k_2}{m}} = 316 \text{ rad.s}^{-1}$

$\omega_{0,1} = \omega$, il faut choisir le 2nd ressort pour que le ressort n'entre pas en résonance.