Correction ex 6-7-8-9

6. Association de 2 ressorts verticaux ☺☺☺

1) Forces exercées sur M dans le référentiel terrestre supposé galiléen :
- poids : $m\overrightarrow{g} = -mg\overrightarrow{e_x}$
- force de rappel du ressort (1) : $\overrightarrow{T_1} = -k_1.(l_1 - l_0).\overrightarrow{e_x} = -k_1.(x - l_0).\overrightarrow{e_x}$
- force de rappel du ressort (2) : $\overrightarrow{T_2} = -k_2.(l_2 - l_0).(-\overrightarrow{e_x}) = +k_2.((2l_0 - x) - l_0).\overrightarrow{e_x} = -k_2.(x - l_0).\overrightarrow{e_x}$

2.a) Le PFD s'écrit : $m\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}_T}} = m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{T_1} + \overrightarrow{T_2}$

Soit, en projection selon $\overrightarrow{e_x}$: $\begin{cases} \text{hors équilibre} & m\ddot{x} = -mg - (k_1 + k_2).(x - l_0) & ① \\ \text{à l'équilibre :} & 0 = -mg - (k_1 + k_2).(x_{éq} - l_0) & ② \end{cases}$

La relation ② donne : $\boxed{x_{éq} = l_0 - \dfrac{mg}{k_1 + k_2}}$

2.b) En effectuant ① − ②, on obtient : $m\ddot{x} = -(k_1 + k_2).(x - x_{éq})$

Soit : $\xrightarrow{X = x - x_{éq}} \quad \ddot{X} + \dfrac{k_1 + k_2}{m}.X = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0}$ avec $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k_1 + k_2}{m}}}$

3) $\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_{p_g} + \mathcal{E}_{p_{el_1}} + \mathcal{E}_{p_{el_2}} = mgx + \dfrac{1}{2}k_1.(l_1 - l_0)^2 + \dfrac{1}{2}k_2.(l_2 - l_0)^2 + \text{Cte}$

Soit : $\boxed{\mathcal{E}_p = mgx + \dfrac{1}{2}.(k_1 + k_2).(x - l_0)^2 + \text{Cte}}$

4.a) Pour trouver la position d'équilibre on pose :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}x}\right)_{x_{éq}} = \begin{cases} 0 \\ (k_1 + k_2).(x_{éq} - l_0) + mg \end{cases} \Rightarrow \boxed{x_{éq} = l_0 - \frac{mg}{k_1 + k_2}}$$

4.b) En dérivant une seconde fois, on établit que l'équilibre est stable puisque :
$\boxed{\left(\dfrac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x_{éq}} = k_1 + k_2 > 0}$

4.c) Pour établir l'équation du mouvement, on applique le théorème de la puissance mécanique :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_k + \mathcal{E}_p}{\mathrm{d}t} = \begin{cases} \mathcal{P}_{NC} = 0 \\ m.\dot{x}.\ddot{x} + (k_1 + k_2).\dot{x}.(x - l_0) + mg\dot{x} \end{cases} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k_1 + k_2}{m}.(x - l_0) + g = 0$$

On retrouve : $\boxed{\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0}$

5) La solution est de la forme : $X = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$
La dérivée est : $\dot{X} = -X_m.\omega_0.\sin(\omega_0 t + \varphi)$.
Les conditions initiales donnent :

$$\begin{cases} X(0) = X_m \cos(\varphi) = x_0 - x_{éq} \\ \dot{X}(0) = -X_m\omega_0 \sin(\varphi) = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x(t) = x_{éq} + (x_0 - x_{éq}).\cos(\omega_0 t)}$$

7. Influence de l'amortissement ☺☺

1. *Ref d'étude:* ref terrestre repère d'espace associé $R(0,\vec{u}_x,\vec{u}_y)$ *(l'origine est prise à la position d'équilibre)*

Systéme: la masse - *Coordonnées* :cartésiennes *(x,y)* - *Base de projection*: $(\vec{u}_x,\vec{u}_y)$

Vecteurs cinématiques: $\vec{OM}=x\vec{u}_x$ $\vec{v}=\dot{x}\vec{u}_x$ $\vec{a}=\ddot{x}\vec{u}_x$ *(y=0)*

Bilan des forces:

- Poids: $\vec{P}=m\vec{g}=-mg\vec{u}_y$
- Réaction du support: $\vec{R}=R\vec{u}_y$ R orthogonale au déplacement car pas de frottements
- Force de rappel du ressort: $\vec{F}=-k(l-l_0)\vec{u}_x=-k(l_0+x-l_0)\vec{u}_x=-kx\vec{u}_x$
- Force de frottement : $\vec{f}=-\lambda\vec{v}=-\lambda\dot{x}\vec{u}_x$

Loi de la quantité de mouvement:

- $m\vec{a}=\vec{P}+\vec{R}+\vec{F}+\vec{f}$
- Par projection sur les axes: $m\ddot{x}=-kx-\lambda\dot{x}$ (1) et -mg+R=0 (2)
- L'équation (1) conduit à (1'): $\boxed{\ddot{x}+\frac{\lambda}{m}\dot{x}+\frac{k}{m}x=0}$.

2. A l'équation (1') on associe l'équation caractéristique : $r^2+\frac{\lambda}{m}r+\frac{k}{m}r=0$. La solution dépend du signe de son discriminant : $\Delta=(\frac{\lambda}{m})^2-4\frac{k}{m}$. *(par la suite, il est plus simple de raisonner directement sur les applications numériques)*

a) $\lambda=50$; m=5kg ; k=8SI.

L'équation caractéristique est : $r^2+\frac{50}{5}r+\frac{80}{5}=0$ en simplifiant : $r^2+10r+16=0$.

$\Delta=(10)^2-4\times16=36=6^2>0$. **Le régime est apériodique.**

Les racines de l'équation sont $x_1=\frac{(-10-6)}{2}=-8$ $x_2=\frac{(-10+6)}{2}=-2$. La solution est du type :

$x(t)=Ae^{-8t}+Be^{-2t}$.

On détermine A et B grâce aux conditions initiales : $x(0)=3=A+B$. On calcule $\dot{x}(t)=-8Ae^{-8t}-2Be^{-2t}$ d'où : $\dot{x}(0)=0=-8A-2B$. On tire des deux équations précédentes : $A=4cm=0{,}04m$ et $B=-1cm=-0{,}01m$

Finalement : $\boxed{x(t)=0{,}04e^{-8t}-0{,}01e^{-2t}}$ (*x(t)* exprimé en m).

La durée caractéristique du régime transitoire est : $\boxed{\tau=\frac{1}{2}=0{,}5s}$

b) $\lambda=20$; m=5kg ; k=8SI.

L'équation caractéristique est : $r^2+\frac{20}{5}r+\frac{80}{5}=0$ en simplifiant : $r^2+4r+16=0$. $\Delta=(4)^2-4\times16=-48<0$.

Le régime est pseudo-périodique.

Les racines de l'équation sont $x_1=\frac{(-4-i\sqrt{48})}{2}=-2-2\sqrt{3}i=-2-3{,}46i$ $x_2=-2+3{,}46i$. La solution est du type : $x(t)=e^{-2t}[A\cos(3{,}46t)+B\sin(3{,}46t)]$.

On détermine A et B grâce aux conditions initiales : $x(0)=3=A$. On calcule
$\dot{x}(t)=-2e^{-2t}[A\cos(3{,}46t)+B\sin(3{,}46t)]+e^{-2t}[-3{,}46A\sin(3{,}46t)+3{,}46B\cos(3{,}46t)]$ d'où :
$\dot{x}(0)=0=-2A+3{,}46B$. On tire des deux équations précédentes : $A=3cm=0{,}03m$ et $B=1{,}7cm=0{,}017m$

Finalement : $\boxed{x(t)=e^{-2t}[0{,}03\cos(3{,}46t)+0{,}017\sin(3{,}46t)]}$ (*x(t)* exprimé en m)

La durée caractéristique du régime transitoire est : $\boxed{\tau=\frac{1}{2}=0{,}5s}$

c) $\lambda=0$; m=5kg ; k=8SI.

L'équation différentielle est celle d'un oscillateur harmonique : $\boxed{\ddot{x}+16x=0}$.

Sa pulsation propre est : $\omega_0=\sqrt{16}=4\,rad.s^{-1}$. **Le régime est sinusoïdal.**

La solution est du type : $x(t)=[A\cos(4t)+B\sin(4t)]$.

On détermine A et B grâce aux conditions initiales : $x(0)=3=A$. On calcule $\dot{x}(t)=-4A\sin(4t)+4B\cos(4t)$ d'où : $\dot{x}(0)=0=4B$. On tire des deux équations précédentes : $A=3\,cm=0{,}03\,m$ et $B=0$

Finalement : $\boxed{x(t)=0{,}03\cos(4t)}$ (*x(t)* exprimé en m)

Il n'y a pas de régime transitoire dans ce cas.

3. Le régime critique correspond au cas où $\Delta=\left(\frac{\lambda}{m}\right)^2-4\frac{k}{m}=0$ d'où : $\lambda=2\sqrt{km}=2\sqrt{1600}=40$. L'équation caractéristique est : $r^2+\frac{40}{5}r+\frac{80}{5}=0$ en simplifiant : $r^2+8r+16=0$. La racine double est : $x_1=-4$. La solution est du type : $x(t)=(A+Bt)e^{-4t}$ .On détermine A et B grâce aux conditions initiales : $x(0)=3=A$. On calcule $\dot{x}(t)=Be^{-4t}-4(A+Bt)e^{-4t}$ d'où : $\dot{x}(0)=0=B-4A$. On tire des deux équations précédentes : $A=3\,cm=0{,}03\,m$ et $B=4A=12\,cm=-0{,}12\,m$

Finalement : $\boxed{x(t)=0{,}01(1+4t)e^{-4t}}$ (*x(t)* exprimé en m).

La durée caractéristique du régime transitoire est : $\boxed{\tau=\frac{1}{4}=0{,}25\,s}$. Ce régime correspond au retour le plus rapide à la position d'équilibre.

8. Mesure du coefficient de viscosité de la glycérine ☺☺

1. *Ref d'étude:* ref terrestre repère d'espace associé $R(O,\vec{u}_z)$

Système: la masse. *Coordonnées* :cartésiennes *(z)*. *Base de projection*: $(\vec{u}_z)$

Bilan des forces:

- Poids : $\vec{P}=m\vec{g}=mg\vec{u}_z=\rho\frac{4}{3}\pi r^3 g\vec{u}_z$
- Force de rappel du ressort: $\vec{F}=-k(z_{eq}-l_0)\vec{u}_z$
- La poussée d'Archimède : $\vec{\Pi}_A=-\rho_0\frac{4}{3}\pi r^3 g\vec{u}_z$
- La force de frottement est nulle à l'équilibre.

Loi de la quantité de mouvement à l'équilibre: $\vec{P}+\vec{F}+\vec{\Pi}_A=\vec{0}$

Par projection sur l'axe Oz: $\rho\frac{4}{3}\pi r^3 g-k(z_{eq}-l_0)-\rho_0\frac{4}{3}\pi r^3 g=0$ *d'où:* $\boxed{z_{eq}=l_0+\frac{4}{3}\pi r^3\frac{g}{k}(\rho-\rho_0)}$

2. On étudie maintenant la masse hors équilibre.

Vecteurs cinématiques : $\vec{v}=\dot{z}\vec{u}_z$; $\vec{a}=\ddot{z}\vec{u}_z$

Bilan des forces:

- Poids : $\vec{P}=m\vec{g}=mg\vec{u}_z=\rho\frac{4}{3}\pi r^3 g\vec{u}_z$
- Force de rappel du ressort: $\vec{F}=-k(z-l_0)\vec{u}_z$
- La poussée d'Archimède : $\vec{\Pi}_A=-\rho_0\frac{4}{3}\pi r^3 g\vec{u}_z$
- La force de frottement : $\vec{f}=-6\pi\eta r\vec{v}=-6\pi\eta r\dot{z}\vec{u}_z$

Loi de la quantité de mouvement à l'équilibre: $\vec{P}+\vec{F}+\vec{\Pi}_A+\vec{f}=m\ddot{z}\vec{u}_z$

Par projection sur l'axe Oz: $\rho\frac{4}{3}\pi r^3 g-k(z-l_0)-\rho_0\frac{4}{3}\pi r^3 g-6\pi\eta r\dot{z}=m\ddot{z}$ *d'où :*

$$\boxed{m\ddot{z}+6\pi\eta r\dot{z}+kz=\rho\frac{4}{3}\pi r^3 g+kl_0-\rho_0\frac{4}{3}\pi r^3 g} \quad (1)$$

3. *On pose* $Z=z-z_{eq}$

3.1. *Ainsi :* $z=Z+l_0+\frac{4}{3}\pi r^3\frac{g}{k}(\rho-\rho_0)$; $\dot{z}=\dot{Z}$ *et* $\ddot{z}=\ddot{Z}$. On remplace dans l'équation (1) :

$$m\ddot{Z}+6\pi\eta r\dot{Z}+k\left(Z+l_0+\frac{4}{3}\pi r^3\frac{g}{k}(\rho-\rho_0)\right)=\rho\frac{4}{3}\pi r^3 g+kl_0-\rho_0\frac{4}{3}\pi r^3 g\,.$$

Après simplification : $m\ddot{Z}+6\pi\eta r\dot{Z}+kZ=0$. Cette équation écrite sous sa forme canonique est : $\boxed{\ddot{Z}+\frac{6\pi\eta r}{m}\dot{Z}+\frac{k}{m}Z=0}$.

Par identification : $\boxed{\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}}$ et $\boxed{\frac{\omega_0}{Q}=\frac{6\pi\eta r}{m}}$ d'où $\boxed{Q=m\frac{\omega_0}{6\pi\eta r}=\frac{\sqrt{km}}{6\pi\eta r}}$

3.2. Pour résoudre l'équation précédente, on lui associe l'équation caractéristique : $\boxed{u^2+\frac{6\pi\eta r}{m}u+\frac{k}{m}=0}$. Le régime est pseudo périodique si son discriminant est négatif soit : $\left(\frac{6\pi\eta r}{m}\right)^2-\frac{4k}{m}<0$ soit : $\boxed{\eta<\frac{\sqrt{km}}{3\pi r}}$.

La pseudo-pulsation est : $\boxed{\omega=\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}$.

3.3.

a) On déduit $\omega=\omega_0\sqrt{1-\frac{9\pi^2\eta^2r^2}{k\,m}}$ d'où $T=\frac{T_0}{\sqrt{1-\frac{9\pi^2\eta^2r^2}{m\,\omega_0^2}}}=\frac{T_0}{\sqrt{1-\frac{9\,T_0^2\eta^2r^2}{4\,m^2}}}$ soit $T^2(1-\frac{9\,T_0^2\eta^2r^2}{4\,m^2})=T_0^2$ d'où

$1-\frac{9\,T_0^2\eta^2r^2}{4\,m^2}=\frac{T_0^2}{T^2}$ d'où $\frac{9\,T_0^2\eta^2r^2}{4\,m^2}=1-\frac{T_0^2}{T^2}$ d'où $\eta=\frac{2\mathrm{m}}{3\,r}\sqrt{\frac{1}{T_0^2}-\frac{1}{T^2}}$.

Or $m=\rho\frac{4}{3}\pi r^3$ d'où : $\boxed{\eta=\frac{8}{9}\rho\pi r^2\sqrt{\frac{1}{T_0^2}-\frac{1}{T^2}}}$. La détermination de T et T_0 permet d'accéder à η.

b) $3\,T_0=1,1$ D'où $\boxed{T_0=0,367\,s}$, $\boxed{T=0,4\,s}$

D'où $\boxed{\eta=\frac{8}{9}7800\pi(5.10^{-3})^2\sqrt{\frac{1}{0,367^2}-\frac{1}{0,4^2}}=0,655\,SI}$

9. Vibrations d'un moteur ☺☺

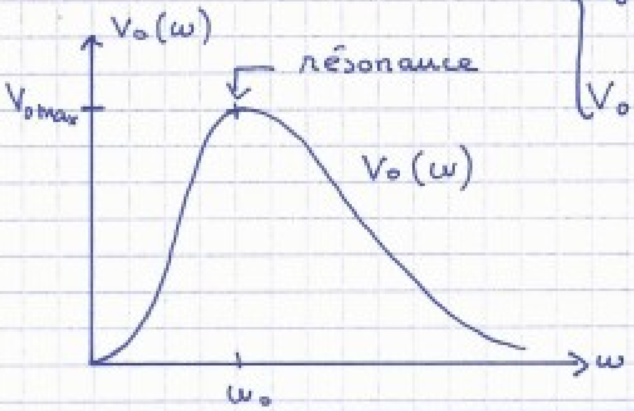
32) A $F_0 \cos \omega t$ on associe $\underline{F} = F_0$. A l'équation de la question 31, on associe l'équation complexe en considérant que dériver revient à multi-plier par $j\omega$ et intégrer à diviser par $j\omega$: $j\omega \underline{V} \quad \frac{\omega_0 \underline{V}}{Q} + \frac{\omega_0^2}{j\omega} \underline{V} = \frac{F_0}{m}$

$\Rightarrow \underline{V} \left(\frac{\omega_0}{Q} + j\left(\omega - \frac{\omega_0^2}{\omega}\right)\right) = \frac{F_0}{m}$

$\Rightarrow \boxed{\underline{V} = \dfrac{F_0/m}{\frac{\omega_0}{Q} + j\left(\omega - \frac{\omega_0^2}{\omega}\right)}}$ En prenant le module : $V_0 = \dfrac{F_0/m}{\sqrt{\left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 + \left(\omega - \frac{\omega_0^2}{\omega}\right)^2}}$

$\lim_{\omega \to 0} V_0 = 0 \qquad \lim_{\omega \to \infty} V_0 = 0$

$\begin{cases} V_0 \text{ est max pour } \omega = \omega_0 \\ V_{0max} = \frac{F_0/m}{\omega_0} \times Q = \frac{F_0/m}{\sqrt{k}} \times \frac{\sqrt{km}}{\alpha} \sqrt{m} \\ V_{0max} = \frac{F_0}{\alpha} \end{cases}$



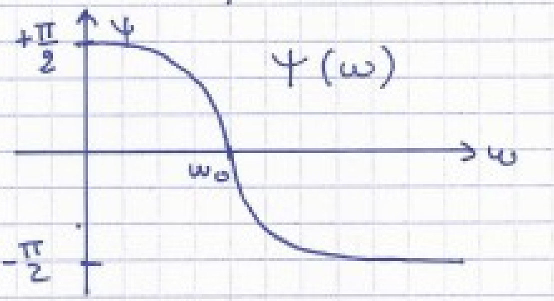
---

33) $\psi(\omega) = \arg \underline{V}(\omega) = \arg F_0/m - \arg\left(\frac{\omega_0}{Q} + j\left(\omega - \frac{\omega_0^2}{\omega}\right)\right)$

$\Rightarrow \psi(\omega) = \arg\left[\frac{\omega_0}{Q} + j\left(\frac{\omega_0^2}{\omega} - \omega\right)\right]$

$\cos\psi > 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < \psi < +\frac{\pi}{2}$

$\tan\psi = Q\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)$



$\begin{cases} \lim_{\omega \to 0} \tan\psi = +\infty \\ \Rightarrow \psi \to +\frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} \lim_{\omega \to +\infty} \tan\psi = -\infty \\ \Rightarrow \psi \to -\frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} \tan\psi = 0 \text{ pour } \omega = 0 \\ \Rightarrow \psi = 0 \end{cases}$

---

34) Pour $k_1 = 4.10^6 \, N.m^{-1}$ $\omega_{01} = \sqrt{\frac{k_1}{m}} = 632 \text{ rad.s}^{-1}$

Pour $k_2 = 10^6 \, N.m^{-1}$ $\omega_{02} = \sqrt{\frac{k_2}{m}} = 316 \text{ rad.s}^{-1}$

$\omega_{01} = \omega$, il faut choisir le 2nd ressort pour que le ressort n'entre pas en résonance