

Particules dans E et B_Correction

1. Mesure de la charge massique de l'électron, expérience de J.J Thomson

1. *Référentiel d'étude* : ref galiléen de repère d'espace $R(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. *Système* : un électron.
- *Coordonnées* : cartésiennes. *Base de projection* : $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.
 - *Vecteurs cinématiques* : $\vec{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$, $\vec{v} = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z$, $\vec{a} = \ddot{x}\vec{u}_x + \ddot{y}\vec{u}_y + \ddot{z}\vec{u}_z$.
 - *Bilan des forces* : Poids : négligeable. Force électrique $\vec{F}_E = -e\vec{E} = eE\vec{u}_y$.
 - 2ème loi de Newton : $m\vec{a} = e\vec{E} + \vec{p} = -e\vec{E}$

Projection de la 2ème loi de Newton dans la base de projection :

- $m\ddot{x} = 0$ d'où en tenant compte des CI : $x(t) = v_0 t$.
- $m\ddot{y} = eE$ d'où en tenant compte des CI : $y(t) = \frac{1}{2} \frac{eE}{m} t^2$.
- $m\ddot{z} = 0$ d'où $z(t) = 0$.

D'où l'équation de la trajectoire: $y(t) = \frac{1}{2} \frac{eE}{m} \frac{x^2}{(v_0)^2}$. A la sortie du dispositif $x_M = a$ et $y_M = \frac{1}{2} \frac{eE}{m} \frac{a^2}{(v_0)^2}$.

2. Entre M et S la trajectoire est rectiligne d'équation : $y = ax + b$. avec $a = \left(\frac{dy}{dx}\right)_M = \frac{eE}{m} \frac{a}{v_0^2}$ et $b = y_M - a x_M$

d'où $b = \frac{1}{2} \frac{eE}{m} \frac{a^2}{v_0^2} - \frac{eE}{m} \frac{a}{v_0^2} \times a = -\frac{1}{2} \frac{eE}{m} \frac{a^2}{(v_0)^2}$ d'où : $y = \frac{eE}{m} \frac{a}{v_0^2} \left(x - \frac{a}{2}\right)$ cette droite coupe l'axe des

abscisses en $x = \frac{a}{2}$. $x_S = D + \frac{a}{2}$ donc $Y = \frac{eE}{m} \frac{aD}{v_0^2}$.

3. Lors de la deuxième expérience, $\vec{F}_B + \vec{F}_E = \vec{0}$ donc $\|\vec{F}_B\| = \|\vec{F}_E\|$ d'où $eV_0 B = eE$ d'où $V_0 = \frac{E}{B}$ on en

déduit que $Y = \frac{e}{m} aD \frac{B^2}{E}$ d'où $\frac{e}{m} = \frac{Y E}{a D B^2}$.

2. Action de 2 champs magnétiques successifs

a) Dans chaque demi-espace règne un champ magnétique $\vec{B}$, la particule y aura un mouvement circulaire uniforme de rayon

$$R = \frac{m v_0}{q B} \text{ à la vitesse angulaire } \omega = \frac{v_0}{R} = \frac{q B}{m}.$$

Dans le demi-espace $x > 0$, le champ est $\vec{B}_1 = B_0 \vec{u}_z$, le rayon sera

$$R_1 = \frac{m v_0}{q B_0}.$$

Dans le demi-espace $x < 0$, le champ est $\vec{B}_2 = \frac{B_0}{2} \vec{u}_z$, le rayon sera

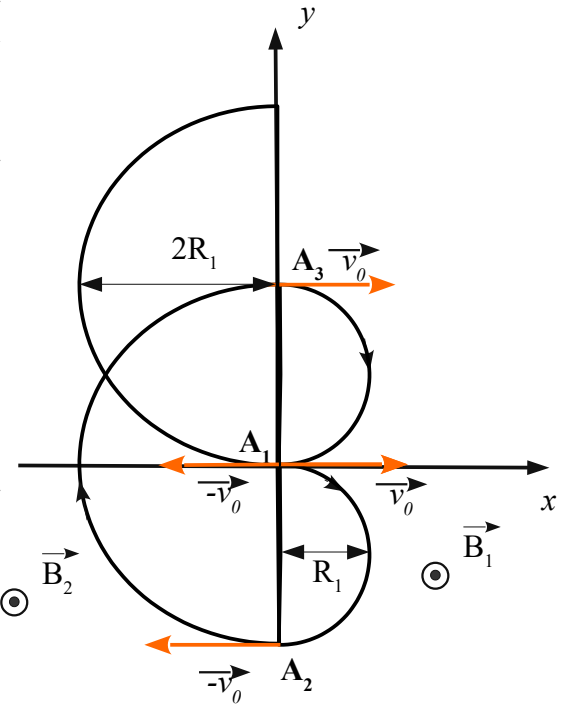
$$R_2 = \frac{2 m v_0}{q B_0} = 2 R_1.$$

La particule pénètre en A_1 avec la vitesse $\vec{v} = v_0 \vec{u}_x$, elle y subit la force magnétique $\vec{F}_B = q v_0 \vec{u}_x \wedge B_0 \vec{u}_z = -q v_0 B_0 \vec{u}_y$ ainsi la trajectoire circulaire part vers le bas jusqu'au point A_2 .

En A_2 , la particule a la vitesse $-\vec{v}_0 = -v_0 \vec{u}_x$, elle subit alors la force

magnétique $\vec{F}_B = -q v_0 \vec{u}_x \wedge \frac{B_0}{2} \vec{u}_z = q v_0 \frac{B_0}{2} \vec{u}_y$ ainsi la trajectoire

circulaire part vers le haut jusqu'au point A_3 où la situation est identique au point A_1 .



b) Pour aller de A_1 à A_2 la particule met le temps $\frac{T_1}{2} = \frac{\pi}{\omega_1} = \frac{m\pi}{q B_0}$. Pour aller de A_2 à A_3 la particule met le temps

$\frac{T_2}{2} = \frac{\pi}{\omega_2} = \frac{2m\pi}{q B_0}$. Le temps mis pour aller de A_1 à A_2 est : $\Delta t = \frac{m\pi}{q B_0} + \frac{2m\pi}{q B_0} = \frac{3m\pi}{q B_0}$. La distance parcourue est :

$d = 2 R_1 = \frac{2 m v_0}{q B_0}$. La vitesse de dérive est ainsi

$$v_D = \frac{2 R_1}{\Delta t} = \frac{2 m v_0}{q B_0} \times \frac{q B_0}{3 m \pi} = \frac{2 v_0}{3 \pi} \text{ d'où } \boxed{\vec{v}_D = \frac{2 v_0}{3 \pi} \vec{u}_y}.$$

c) Dans le demi-espace $x > 0$, le champ est $\vec{B}_1 = B_0 \vec{u}_z$, le rayon sera $R_1 = \frac{m v_0}{q B_0}$.

Dans le demi-espace $x < 0$, le champ est $\vec{B}_2 = -B_0 \vec{u}_z$, le rayon sera $R_1 = \frac{m v_0}{q B_0}$.

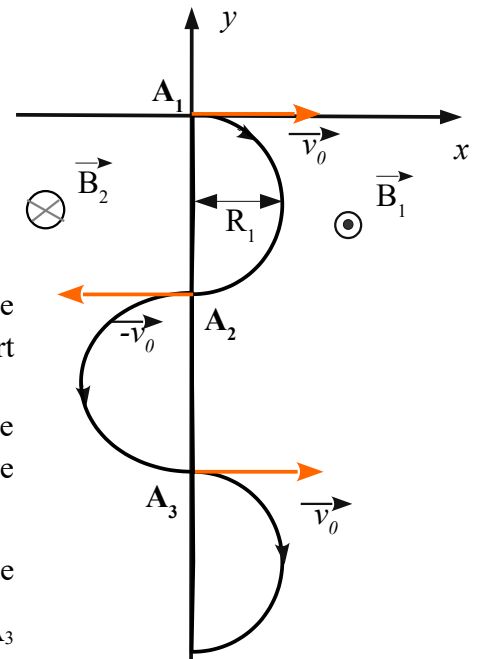
La particule pénètre en A_1 avec la vitesse $\vec{v} = v_0 \vec{u}_x$, elle y subit la force magnétique $\vec{F}_B = q v_0 \vec{u}_x \wedge B_0 \vec{u}_z = -q v_0 B_0 \vec{u}_y$ ainsi la trajectoire circulaire part vers le bas jusqu'au point A_2 .

En A_2 , la particule a la vitesse $-\vec{v}_0 = -v_0 \vec{u}_x$, elle subit alors la force magnétique $\vec{F}_B = -q v_0 \vec{u}_x \wedge (-B_0 \vec{u}_z) = -q v_0 B_0 \vec{u}_y$ ainsi la trajectoire circulaire part vers le bas jusqu'au point A_3 où la situation est identique au point A_1 .

b) Pour aller de A_1 à A_2 la particule met le temps $\frac{T_1}{2} = \frac{\pi}{\omega_1} = \frac{m\pi}{q B_0}$. Pour aller de

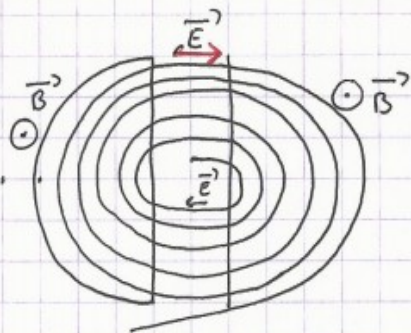
A_2 à A_3 la particule met le même temps. Le temps mis pour aller de A_1 à A_3 est : $\Delta t = \frac{2m\pi}{q B_0}$. La distance parcourue est :

$$d = 4 R_1 = \frac{4 m v_0}{q B_0}. \text{ La vitesse de dérive est ainsi } v_D = \frac{4 R_1}{\Delta t} = \frac{4 m v_0}{q B_0} \times \frac{q B_0}{2 m \pi} = \frac{2 v_0}{\pi} \text{ d'où } \boxed{\vec{v}_D = \frac{-2 v_0}{\pi} \vec{u}_y}.$$



3. Cyclotron de Lawrence: « Schéma sur un bout de papier »

1)



$$2) \quad \omega_c = \frac{qB}{m} = \text{cte} = \frac{V}{R} = \frac{V_{\max}}{R_{\max}}$$

Or $E = 80000 \text{ eV}$ et $1,6 \times 10^{-19} \text{ eV} = 1 \text{ eV}$

$$= 80000 \times 1,6 \times 10^{-19} = 1,28 \times 10^{-14} \text{ J} = \frac{1}{2} m V_{\max}^2$$

$$\Rightarrow V_{\max} = \left(\frac{2E}{m} \right)^{1/2} = \left(\frac{2 \times 1,28 \times 10^{-14}}{1,67 \times 10^{-27}} \right)^{1/2} = \underline{3,91 \times 10^6 \text{ m.s}^{-1}}$$

3) La vitesse accélératrice à utiliser est $qU = \frac{1}{2} m V^2$

$$\Rightarrow qU = 80000 \times 1,6 \times 10^{-19} \Rightarrow \boxed{U = 80000 \text{ V}}$$

$$4) \quad \omega_c = \frac{V_{\max}}{R_{\max}} = \frac{3,91 \times 10^6}{14 \cdot 10^{-2}} = \frac{3,91}{14} \times 10^8 = 2,79 \times 10^7 \text{ rad.s}^{-1}$$

$$\omega_c = 2\pi N_c \Rightarrow \underline{N_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = 4,44 \text{ MHz}}$$

5) $U_0 = 2000 \text{ V}$ A chaque $\frac{1}{2}$ tour l'énergie acquise est 2000 eV

$$\frac{80000}{4000} = 20 \quad \text{A chaque tour } 2 \times U_0$$

Pour n tours $2nU_0 = E \Rightarrow \underline{n = \frac{E}{2U_0} = \frac{80000}{4000} = 20}$ ↗ E en eV

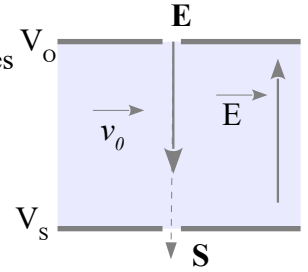
$$6) \quad \omega_c = \frac{qB}{m} \Rightarrow B = \frac{m \omega_c}{q} = \frac{1,67 \times 10^{-27} \times 2,79 \cdot 10^7}{1,6 \times 10^{-19}} = 0,29 \text{ T}$$

4. Spectrographe de masse: séparation isotopique

1. $U_0 = V_s - V_0 > 0$ car le **champ électrique accélérateur** orienté de E vers S est dans le sens des potentiels décroissants.

On applique le théorème de l'énergie cinétique à l'ion entre E et S.

$$\frac{1}{2} m v_s^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = W_{\vec{F}_E} E \rightarrow S = q V_0 - q V_s = e U_0 \text{ d'où } \boxed{v_s = \sqrt{\frac{2 e U_0}{m}}} \text{ car } v_0 \ll v_s.$$



2. Dans la chambre de déviation :

2.1. La trajectoire des ions est circulaire. La force magnétique est donnée par la relation : $\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$ en S elle doit être orientée vers le centre de courbure on en déduit que **$\vec{B}$ doit être orienté vers l'avant du schéma.**

2.2. Pour montrer que le mouvement est uniforme on calcule le travail de la force magnétique. $\delta W \vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B} \cdot d\vec{l} = q \vec{v} \wedge \vec{B} \cdot \vec{v} dt = 0$.

On en déduit par application du théorème de l'énergie cinétique que $E_c = \text{cste}$ d'où $\|\vec{v}\| = \text{constante} = v_s$.

Le champ magnétique dévie les particules mais ne modifie pas la norme de leur vitesse.

Soit O, le centre de la trajectoire. Dans le référentiel terrestre de repère d'espace $R(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. On repère l'ion grâce au point M au cours du mouvement de coordonnées polaires (R, θ) .

$$\vec{OM} = R \vec{u}_R, \quad \vec{v} = R \dot{\theta} \vec{u}_\theta = v_s \vec{u}_\theta \text{ et } \vec{a} = -R \dot{\theta}^2 \vec{u}_R = -\frac{v_s^2}{R} \vec{u}_R$$

La force magnétique s'exprime

$$\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B} = q R \dot{\theta} \vec{u}_\theta \wedge B \vec{u}_z = q R \dot{\theta} B \vec{u}_R = -e v_s B \vec{u}_R$$

D'après la 2^{ème} loi de Newton : $m \vec{a} = \vec{F}$ d'où $-m \frac{v_s^2}{R} = -e v_s B$.

On obtient ainsi : $\boxed{R = \frac{m v_s}{e B}}$ en remplaçant v_s par son expression obtenue à la

question 1. On obtient : $\boxed{R = \frac{m}{e B} \sqrt{\frac{2 e U}{m}} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2 m U}{e}}}$

Rem : on peut déterminer R en raisonnant en valeur absolue comme dans le cours.

3.1. D'après la question précédente, on voit que le rayon de la trajectoire augmente avec la masse donc $R_2 > R_1$. Le collecteur C1 reçoit les ions les moins lourds soit l'isotope 79.

3.2. Le schéma représentatif des 2 trajectoires est représenté ci-contre:

$$O_1 O_2 = 2(R_2 - R_1) = \frac{2}{B} \sqrt{\frac{2 U_0}{|q|}} (\sqrt{m_2} - \sqrt{m_1})$$

Application numérique : $O_1 O_2 = \frac{2}{0,1} \sqrt{\frac{8000}{1,6 \cdot 10^{-19}}} (\sqrt{1,3436 \cdot 10^{-25}} - \sqrt{1,3104 \cdot 10^{-25}})$ d'où

$$\boxed{O_1 O_2 = 2,04 \text{ cm}}$$

3.3. Pour ^{79}Br , le pourcentage est $P_1 = \frac{Q_1}{Q_1 + Q_2} \times 100$ soit :

$$P_1 = \frac{6,60}{6,60 + 1,95} \times 100 = 77,2\% \text{ et } P_2 = \frac{1,95}{6,60 + 1,95} \times 100 = 22,8\%$$

