

Théorème du moment cinétique_Correction ex 2 - 4

2. Toboggan ☺☺**Bilan des forces :**

- Le poids : $\vec{P} = mg \sin \theta \vec{u}_r + mg \cos \theta \vec{u}_\theta$
- La réaction du toboggan : $\vec{T} = -T \vec{u}_r$. Le signe « - » est une anticipation du fait que la réaction sera vers l'intérieur. La composante sur $\vec{u}_\theta$ est nulle car on néglige les frottements.)

Moments des forces : le moment de la réaction du toboggan est nul ($\vec{T}$ est colinéaire à $\vec{OM}$). Le moment du poids s'écrit

$$\vec{\mathcal{M}}_{\vec{P}_{Io}} = \vec{OM} \wedge \vec{P} = (r \vec{u}_r) \wedge (mg \sin \theta \vec{u}_r + mg \cos \theta \vec{u}_\theta) = mgr \cos \theta \vec{k}$$

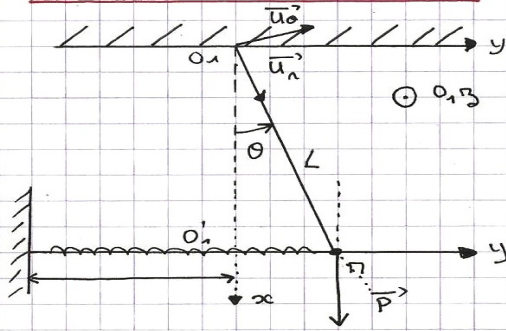
Moment cinétique : $\vec{L} = m \vec{OM} \wedge \vec{v} = m(r \vec{u}_r) \wedge (r \dot{\theta} \vec{u}_\theta) = mr^2 \dot{\theta} \vec{k}$

Théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_{\vec{P}_{Io}} \Rightarrow mr^2 \ddot{\theta} \vec{k} = mgr \cos \theta \vec{k} \Rightarrow r \ddot{\theta} - g \cos \theta = 0$$

3. Oscillations d'une masse ☺☺☺

Oscillations d'une masse



Ref d'étude (O_1, x, y, z)

Base de projection $(\vec{u}_n, \vec{u}_t, \vec{k})$

Système : masse

Vecteurs cinématiques :

$$\vec{O_1 P} = L \vec{u}_n$$

$$\vec{v} = L \dot{\theta} \vec{u}_t$$

$$\vec{L}_{O_1} = \vec{O_1 P} \wedge m \vec{v} = L \vec{u}_n \wedge m L \dot{\theta} \vec{u}_t$$

$$\vec{L}_{O_1} = m L^2 \dot{\theta} \vec{k}$$

Bilan des forces :

$$\vec{P} = mg \vec{u}_t = +mg \cos \theta \vec{u}_n - mg \sin \theta \vec{u}_t$$

$$\mathcal{M}_{\vec{P}/O_1} = mg \cos \theta \vec{u}_n - m = \vec{O_1 P} \wedge \vec{P} = L \vec{u}_n \wedge (mg \cos \theta \vec{u}_n - mg \sin \theta \vec{u}_t)$$

$$\mathcal{M}_{\vec{P}/O_1} = -mg L \sin \theta \vec{k} = -mg L \dot{\theta} \vec{k}$$

$$\vec{F}_e = -k(l - l_0) \vec{u}_y = -k L \sin \theta \vec{u}_y = -k L \dot{\theta} \vec{u}_y = -k L \sin \theta \vec{u}_n - k L \cos \theta \vec{u}_t$$

$$\mathcal{M}_{\vec{F}_e} = L \vec{u}_n \wedge (k L \sin \theta \vec{u}_n - k L \cos \theta \vec{u}_t) = -k L^2 \dot{\theta} \cos \theta \vec{k} \approx -k L^2 \dot{\theta} \vec{k}$$

$$\vec{T} = -T \vec{u}_n \Rightarrow \mathcal{M}_{\vec{T}} = L \vec{u}_n \wedge (-T \vec{u}_n) = \vec{0}$$

TMC :

$$\frac{d\vec{L}_{O_1}}{dt} = \mathcal{M}_{\vec{P}} + \mathcal{M}_{\vec{T}} + \mathcal{M}_{\vec{F}_e} \Rightarrow m L^2 \ddot{\theta} = -mg L \dot{\theta} - k L^2 \dot{\theta}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \left(\frac{g}{L} + \frac{k}{m} \right) \dot{\theta} = 0 \quad \text{ou} \quad \ddot{\theta} + \omega_0^2 \dot{\theta} = 0$$

avec $\omega_0^2 = \frac{g}{L} + \frac{k}{m}$

4. Pendule électrostatique ☺☺

1) Ci-contre

2) Système : Boule

Repère d'espace : $R(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$

Coordonnées : polaires (R, θ) . Base de projection : $(\vec{u}_R, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$,

Vecteurs cinématiques : $\vec{OM} = R\vec{u}_R$, $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ et $\vec{L}_0(M) = \vec{OM} \wedge m\vec{v} = mR^2\dot{\theta}\vec{u}_z$

Bilan des forces et moments :

Poids : $\vec{P} = m\vec{g} = mg \cos \theta \vec{u}_R - mg \sin \theta \vec{u}_\theta$, $\vec{M}_O(\vec{P}) = \vec{OM} \wedge \vec{P} = R\vec{u}_R \wedge (mg \cos \theta \vec{u}_R - mg \sin \theta \vec{u}_\theta) = -mgR \sin \theta \vec{u}_z$

Tension: $\vec{T} = -T\vec{u}_R$, $\vec{M}_O = \vec{OM} \wedge \vec{T} = \vec{0}$

Force électrique: $\vec{F}_E = Q\vec{E} = QE \sin \theta \vec{u}_R + QE \cos \theta \vec{u}_\theta$,

$\vec{M}_O(\vec{F}_E) = \vec{OM} \wedge \vec{F}_E = R\vec{u}_R \wedge (QE \sin \theta \vec{u}_R + QE \cos \theta \vec{u}_\theta) = QER \cos \theta \vec{u}_z$

D'après le théorème du moment cinétique en O (point fixe) : $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O(\vec{P}) + \vec{M}_O(\vec{T}) + \vec{M}_O(\vec{F}_E)$ d'où

$$mR^2\ddot{\theta} = -mgR \sin \theta + QER \cos \theta \quad \text{d'où} \quad \boxed{mR\ddot{\theta} = -mg \sin \theta + QE \cos \theta}$$

3) A l'équilibre: $\ddot{\theta} = 0$ d'où $-mg \sin \theta_e + QE \cos \theta_e = 0$ d'où $\boxed{\tan \theta_e = \frac{QE}{mg}}$

4) On pose $\theta = \theta_e + \varepsilon$ ainsi: $\ddot{\theta} = \ddot{\varepsilon}$. En remplaçant dans l'équation du mouvement, on obtient: $mR\ddot{\varepsilon} = -mg \sin(\theta_e + \varepsilon) + QE \cos(\theta_e + \varepsilon)$ or $\varepsilon \ll \theta_e$ d'où $\cos(\theta_e + \varepsilon) \approx \cos(\theta_e) - \varepsilon \sin(\theta_e)$ et $\sin(\theta_e + \varepsilon) \approx \sin(\theta_e) + \varepsilon \cos(\theta_e)$.

En remplaçant dans l'équation, on obtient : $mR\ddot{\varepsilon} = -mg(\sin \theta_e + \varepsilon \cos \theta_e) + QE(\cos \theta_e - \varepsilon \sin \theta_e)$ or

$$-mg \sin \theta_e + QE \cos \theta_e = 0 \quad \text{d'où} \quad mR\ddot{\varepsilon} = -m g \varepsilon \cos \theta_e - QE \varepsilon \sin \theta_e \quad \text{d'où} \quad \boxed{\ddot{\varepsilon} + \left(\frac{g}{R} \cos \theta_e + \frac{QE}{mR} \sin \theta_e \right) \varepsilon = 0}$$

L'équation obtenue est celle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre : $\boxed{\omega_0^2 = \left(\frac{g}{R} \cos \theta_e + \frac{QE}{mR} \sin \theta_e \right)}$

or $\sin \theta_e = \frac{QE}{mg} \cos \theta_e$ d'où $\omega_0^2 = \left[\frac{g}{R} + \frac{1}{Rg} \left(\frac{QE}{m} \right)^2 \right] \cos \theta_e$ d'où $\boxed{\omega_0^2 = \left[1 + \left(\frac{QE}{mg} \right)^2 \right] \frac{g}{R} \cos \theta_e}$ d'où la période

$$\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{\left[1 + \left(\frac{QE}{mg} \right)^2 \right] g \cos \theta_e}}$$

