Théorème du moment cinétique

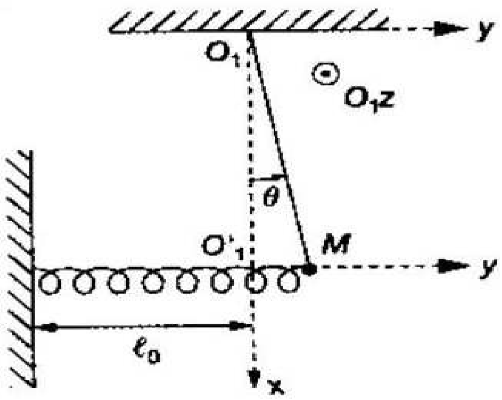
3. Oscillations d'une masse ☺☺☺

Un point matériel M de masse m est relié à un fil inextensible de longueur L et de masse négligeable, ainsi qu'à un ressort horizontal de raideur k et de longueur au repos l_0. Le fil est vertical lorsque le point matériel se trouve au repos en O'_1.

On suppose des petites oscillations quasi horizontales du point M tel que $O'_1M \ll L$.

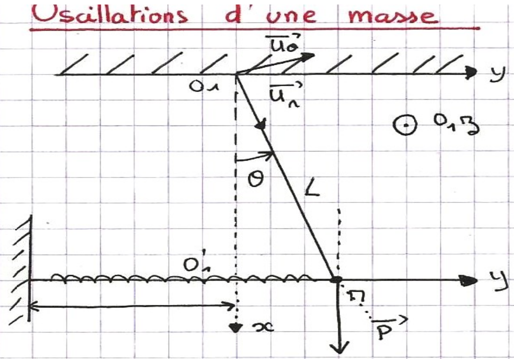
La position du point M est repérée par l'angle d'inclinaison $\theta(t)$ du pendule par rapport à la verticale ($\theta(t)$ est supposé faible)

Établir l'équation du mouvement en utilisant le théorème du moment cinétique appliqué en O_1. En déduire la période T_0 des petites oscillations autour de la position d'équilibre.



Solution:

Oscillations d'une masse



Ref d'étude (O_1, x, y, z)

Base de projection $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \vec{k})$

Système : masse

Vecteurs cinématiques :

$\overrightarrow{O_1M} = L\vec{u_r}$

$\vec{v} = L\dot{\theta}\vec{u_\theta}$

$\vec{L}_{O_1} = \overrightarrow{O_1M} \wedge m\vec{v} = L\vec{u_r} \wedge mL\dot{\theta}\vec{u_\theta}$

$\vec{L}_{O_1} = mL^2\dot{\theta}\vec{k}$

Bilan des forces :

$\vec{P} = mg\vec{u_x} = +mg\cos\theta\,\vec{u_r} - mg\sin\theta\,\vec{u_\theta}$

$\vec{\mathcal{M}}_{\vec{P}/O_1} = mg\cos\theta\,\vec{u_r} - m = \overrightarrow{O_1M} \wedge \vec{P} = L\vec{u_r} \wedge (mg\cos\theta\,\vec{u_r} - mg\sin\theta\,\vec{u_\theta})$

$\boxed{\vec{\mathcal{M}}_{\vec{P}/O_1} = -mgL\sin\theta\,\vec{k}} = -mgL\theta\,\vec{k}$

$\vec{F_e} = -k(l-l_0)\vec{u_y} = -kL\sin\theta\,\vec{u_y} = -kL\theta\,\vec{u_y} = -kL\theta\sin\theta\,\vec{u_r} - kL\theta\cos\theta\,\vec{u_\theta}$

$\vec{\mathcal{M}}_{\vec{F_e}} = L\vec{u_r} \wedge (kL\theta\sin\theta\,\vec{u_r} - kL\theta\cos\theta\,\vec{u_\theta}) = -kL^2\theta\cos\theta\,\vec{k} \simeq -kL^2\theta\,\vec{k}$

$\vec{T} = -T\vec{u_r} \Rightarrow \vec{\mathcal{M}}_{\vec{T}} = L\vec{u_r} \wedge (-T\vec{u_r}) = \vec{0}$

TMC :

$$\frac{d\vec{L}_{O_1}}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_{\vec{P}} + \vec{\mathcal{M}}_{\vec{T}} + \vec{\mathcal{M}}_{\vec{F_e}} \Rightarrow mL^2\ddot{\theta} = -mgL\theta - kL^2\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{L} + \frac{k}{m}\right)\theta = 0 \quad \text{ou} \quad \ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \quad \text{avec } \omega_0^2 = \frac{g}{L} + \frac{k}{m}}$$