

Solide en rotation autour d'un axe fixe

1. Comment différencier un œuf dur d'un œuf cru ? 😊😊

Expérience :

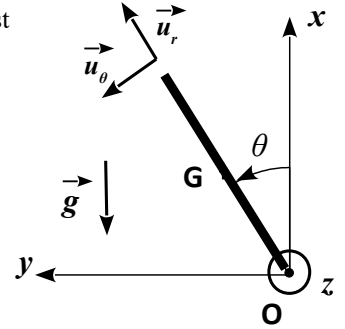
Faire tourner un œuf dur puis un œuf cru sur lui même.

Question : L'un tourne plus vite et plus longtemps que l'autre, lequel ? Expliquer.

2. Chute d'un arbre 😊😊

On modélise la chute d'un arbre par la rotation d'une barre autour de l'axe Oz . L'étude est menée dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Le champ de pesanteur \vec{g} est supposé uniforme.

La barre est modélisée par un cylindre **homogène** de masse M , de longueur D . L'équilibre de la barre est rompu. Elle amorce ainsi une rotation autour de sa base dans le plan vertical (O, x, y) , la liaison pivot en O étant parfaite. On appelle θ l'angle de la barre avec la verticale et on définit la base mobile des coordonnées polaires $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$.



Le moment d'inertie du cylindre homogène autour de l'axe Oz est donné : $J_\Delta = \frac{1}{3} M D^2$.

Données numériques :

- L'intensité du champ de pesanteur vaut $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$.
- La longueur de la barre : $D = 1,0 \text{ m}$.
- Pour $\theta_0 = 5^\circ$: $\int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta_0 - \cos\theta}} = 5,1$.

1. Par application du théorème du moment cinétique par rapport à l'axe Oz , établir l'équation différentielle du mouvement de la barre en θ ; On l'exprimera en fonction de J_Δ , M , g et D , puis en fonction de g et D uniquement.

2. Retrouver cette équation par un raisonnement énergétique.

3. On suppose qu'à $t=0$, la barre immobile fait un angle $\theta_0 = 5^\circ$ avec la verticale.

4. Montrer que lorsque la barre fait un angle θ avec la verticale, sa vitesse angulaire peut s'écrire : $\dot{\theta} = \sqrt{\frac{3g}{d} (\cos\theta_0 - \cos\theta)}$.

5. Par séparation des variables, déduire de l'équation établie dans la question précédente, le temps de rotation Δt de cette barre pour qu'elle arrive à la position horizontale.

3. Embuscade et bras de levier 😊😊

Un indien de masse m tend une embuscade à un convoi passant au fond d'un canyon. Il cherche à faire basculer au fond du canyon un rocher de masse $M = 200 \text{ kg}$. Il utilise un bâton de longueur d appuyé au point O sur un second rocher.

Afin de faire basculer le rocher, il se suspend au bâton. On note $d_1 = 50 \text{ cm}$ la distance entre O et le contact bâton/rocher, $d_2 = 1,5 \text{ m}$ la distance entre O et le contact bâton/indien. On note $\alpha = 60^\circ$ l'angle entre le bâton et l'horizontale.

1) Sous quelle condition sur les moments des différentes forces exercées sur le bâton le rocher se soulève-t-il ?

2) Quelle doit être la masse minimale m de l'indien pour que le rocher se soulève ? Quelle est alors la force exercée ?

3) Quelle est la force minimale que l'on doit exercer sur l'extrémité du bâton qui permettrait de soulever le rocher ?



4. Étude d'une poulie 😊😊

Une masse m est suspendue à l'extrémité d'une corde enroulée sur une poulie de masse m_p et de rayon R en liaison pivot idéale autour de son axe de rotation. Le moment de la poulie par rapport à son axe de rotation vaut :

$$J = m_p \frac{R^2}{2}$$

1) Si l'opérateur impose à la poulie un mouvement de rotation uniforme autour de son axe à la vitesse angulaire ω , déterminez la vitesse de la masse m .

2) Déterminez la force que doit exercer l'opérateur sur la poulie afin de l'empêcher de tourner.

3) Si l'opérateur lâche la poulie, déterminez l'accélération angulaire $\dot{\omega}$ du cylindre, l'accélération linéaire \ddot{x} de la masse m et la valeur de la tension de la corde.

