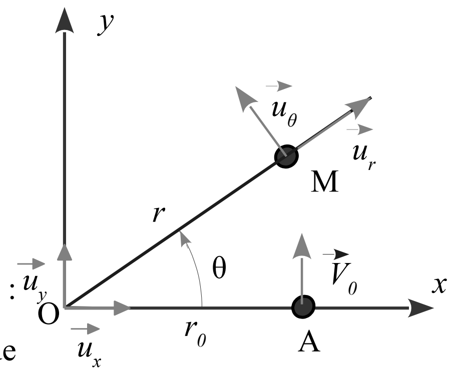
Correction TD

1. Force centrale en $\frac{1}{r^4}$



1. Pour que la force soit attractive, il faut que **K < 0**.
2. $\vec{L}_O = \vec{OM}_0 \wedge m\vec{V}_0 = m r_0 V_0 \vec{u}_z$, or $\vec{L}_O = mC\vec{u}_z$ donc $\boxed{C = r_0 V_0}$.
3. On peut utiliser les coordonnées polaires car le mouvement est plan.
4. (ci-contre)
5.

a) En coordonnées polaires : $\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$, on en déduit l'accélération : $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta$. De plus $\vec{F} = K\frac{m}{r^3}\vec{u}_r$. D'après La 2ème loi de Newton : $m\vec{a} = \vec{F}$ d'où en ne gardant que la composante suivant $\vec{u}_r$:

$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = K\frac{m}{r^3}$ de plus $r^2\dot{\theta} = C$ donc $r\dot{\theta}^2 = \frac{C^2}{r^3}$ d'où : $\boxed{\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{K+C^2}{r^3} = 0}$.

b) On détermine dans un premier temps l'énergie potentielle dont dérive $\vec{F}$. $\frac{dE_P}{dr} = -F(r) = \frac{-Km}{r^3}$ D'où $E_P = \frac{1}{2}\frac{Km}{r^2}$ en posant la constante d'intégration nulle.

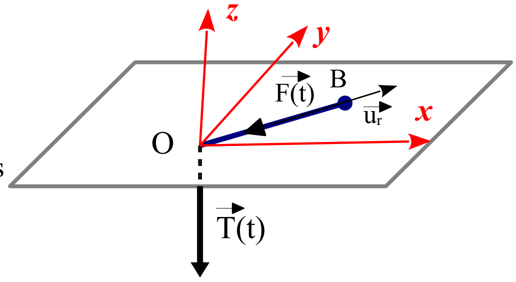
Dans un second temps on exprime l'énergie cinétique en utilisant les coordonnées polaires et la constante des aires : $E_C = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2}$. On en déduit : $E_m = E_C + E_p = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} + \frac{1}{2}\frac{Km}{r^2}$.

Or $E_m = cste$ car le point matériel est soumis à une force conservative. Donc $\frac{dE_m}{dt} = 0$ d'où :

$$\boxed{\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{K+C^2}{r^3} = 0}$$

6. Si la trajectoire est circulaire $r = cste$ donc $\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{K+C^2}{r^3} = 0$ donc $C^2 = -K$ donc $\boxed{C = \pm\sqrt{-K}}$

2. Bille sur un plateau



1) On se place dans le référentiel lié au plateau $R(O,\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$, le système étudié est la bille B.

Bilan des forces : Le poids : $\vec{P}=-mg\,\vec{u}_z$; La réaction du support : $\vec{R}=R\vec{u}_z$; la force : $\vec{F}(t)=F(t)\vec{u}_r$ (F(t) <0). Comme il n'y a pas de mouvement suivant $\vec{u}_z$, d'après la 2ème loi de Newton $\vec{P}+\vec{R}=\vec{0}$. On en déduit que la résultante des forces est : $\boxed{\vec{P}+\vec{R}+\vec{F}(t)=\vec{F}(t)}$.

Cette force est en permanence dirigée vers O donc le mouvement est un mouvement à force centrale.

2) Comme le mouvement est un mouvement à force centrale, $C=l^2\dot{\theta}$ est une constante du mouvement (la démonstration n'est pas demandée). On peut exprimer C grâce aux conditions initiales d'où : $C=l^2(t=0)\dot{\theta}_0=a^2\omega_0$ d'où

$$a^2\omega_0=l^2\dot{\theta}=(a-bt)^2\frac{d\theta}{dt}.$$

Par séparation des variables, on obtient : $\frac{a^2\omega_0\,dt}{(a-bt)^2}=d\theta$ d'où $\int_0^t\frac{a^2\omega_0\,dt}{(a-bt)^2}=\int_{\theta(0)}^{\theta(t)}d\theta$ d'où $\left[\frac{a^2\omega_0}{b(a-bt)}\right]_0^t=[\theta]_{\theta(0)}^{\theta(t)}$ d'où

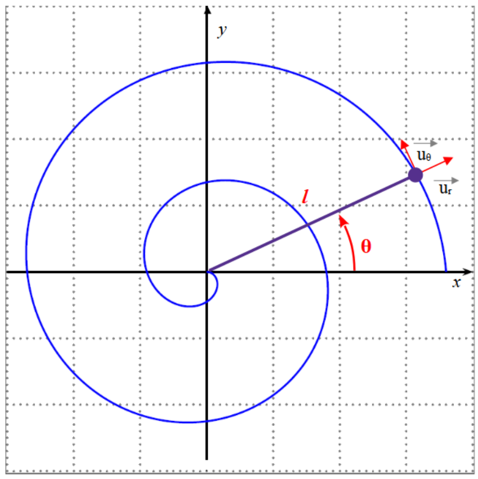
$$\frac{a^2\omega_0}{b(a-bt)}-\frac{a\omega_0}{b}=\frac{a^2\omega_0-a\omega_0(a-bt)}{b(a-bt)}=\theta(t)-\theta(0)$$ d'où $$\boxed{\frac{a\omega_0t}{a-bt}=\theta(t)-\theta(0)}\ (1).$$

Par la suite, on pose $\theta(t)=\theta$ et $\theta(0)=\theta_0$.

Pour obtenir l'équation de la trajectoire, il faut éliminer le temps , on sait que $l=a-bt$ d'où $t=\frac{a-l}{b}$ d'où en remplaçant le temps dans (1) :

$$\frac{a\omega_0(\frac{a-l}{b})}{a-b(\frac{a-l}{b})}=\frac{a\omega_0(a-l)}{bl}=\theta-\theta_0$$ d'où $a\omega_0(a-l)=(\theta-\theta_0)bl$ d'où

$a\omega_0(a-l)=(\theta-\theta_0)bl$ d'où $l((\theta-\theta_0)b+a\omega_0)=a^2\omega_0$ d'où l'équation de la trajectoire : $\boxed{l(\theta)=\frac{a^2\omega_0}{a\omega_0+b(\theta-\theta_0)}}$, c'est l'équation d'une spirale (ci-contre avec θ_0=0) .



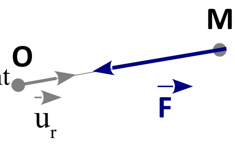
3) On applique le théorème de l'énergie cinétique à la bille entre l'instant t=0 et l'instant t=τ :
$E_C(\tau)-E_C(0)=W(\vec{F})=W_{op}$. Comme le fil est de masse négligeable, la tension exercée par l'opérateur est égale à la force $\vec{F}$.

En coordonnées polaires $\vec{OB}=l\vec{u}_r=(a-bt)\vec{u}_r$ d'où $\vec{v}=-b\vec{u}_r+(a-bt)\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ or $C=l^2\dot{\theta}=a^2\omega_0$ d'où

$l\dot{\theta}=\frac{a^2\omega_0}{l}=\frac{a^2\omega_0}{a-bt}$ d'où $\vec{v}=-b\vec{u}_r+\frac{a^2\omega_0}{a-bt}\vec{u}_\theta$ d'où $v^2=b^2+\frac{a^4\omega_0^2}{(a-bt)^2}$ d'où

$$E_C(\tau)-E_C(0)=\frac{1}{2}m\left[b^2+\frac{a^4\omega_0^2}{l^2(\tau)}-\left(b^2+\frac{a^4\omega_0^2}{a^2}\right)\right]$$ d'où $$\boxed{W_{op}=\frac{1}{2}ma^2\omega_0^2\left(\frac{a^2}{l^2(\tau)}-1\right)}.$$

3. Modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène (1913)



a) L'électron (M) est soumis à la force centrale $\vec{f}=\frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\vec{u}_r$ de la part du proton (O). Schéma ci-contre.

La trajectoire est circulaire de rayon r. En coordonnées polaires $\overrightarrow{OM}=r\vec{u}_r$ et $\vec{v}=r\dot{\theta}\vec{u}_\theta=v\vec{u}_\theta$ ainsi le moment cinétique de l'électron par rapport à O est : $\vec{L}_0=\overrightarrow{OM}\wedge m\vec{v}=mrvu_z$ d'où son module : $|\vec{L}_0|=mrv=n\frac{h}{2\pi}$

d'où $\boxed{v=n\frac{h}{2\pi mr}}$. Cette expression montre que le module de la vitesse est constant, d'où le mouvement circulaire uniforme.

b) On exprime dans un premier temps l'accélération en coordonnées polaires en tenant compte du fait que r et $\dot{\theta}$ sont des constantes : $\vec{a}=-r\dot{\theta}^2\vec{u}_r=\frac{-v^2}{r}\vec{u}_r$. D'après la 2ème loi de Newton : $\vec{f}=m\vec{a}$ d'où $\frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\vec{u}_r=\frac{-v^2}{r}\vec{u}_r$ d'où $v^2=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mr}$. D'après la question précédente, $\frac{v}{nh}=\frac{1}{2\pi mr}$ d'où $v^2=\frac{e^2}{2\varepsilon_0}\times\frac{v}{nh}$ d'où $\boxed{v=\frac{e^2}{2\varepsilon_0 nh}}$ (1).

c) $E_M=E_C+E_P=\frac{1}{2}mv^2-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$ or $v^2=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mr}$ d'où $mv^2=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$ d'où $E_M=\frac{-1}{2}mv^2$ d'après (1) on en déduit que : $E_m=\frac{-1}{2}m\left(\frac{e^2}{2\varepsilon_0 nh}\right)^2=\frac{-me^4}{8\varepsilon_0^2n^2h^2}$. L'énergie dépend d'un entier n , on écrit : $\boxed{E_n=\frac{-E_0}{n}=\frac{-me^4}{8\varepsilon_0^2n^2h^2}}$ d'où $\boxed{E_0=\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2h^2}}$. L'énergie mécanique de l'électron est négative car il est dans un état lié. L'énergie la plus basse correspond à n=1.

d) AN : $\boxed{E_0=13{,}6\,ev}$.

4. Mouvement d'un palet accroché à un ressort

1. Bilan des forces : Le poids : $\vec{P}=-mg\,\vec{u}_z$; La réaction du support : $\vec{R}=R\vec{u}_z$; la force de rappel du ressort : $\vec{F}=-k(l-l_0)\vec{u}_r$. Comme il n'y a pas de mouvement suivant $\vec{u}_z$, d'après la 2ème loi de Newton $\vec{P}+\vec{R}=\vec{0}$. On en déduit que la résultante $\boxed{\vec{R}_{es}=\vec{P}+\vec{R}+\vec{F}=\vec{F}}$.

On applique le théorème du moment cinétique au palet : $\dfrac{d\vec{L}_O}{dt}=\vec{M}_O(\vec{F})$ or $\vec{M}_O(\vec{F})=\vec{OM}\wedge\vec{F}=l\,\vec{u}_r\wedge(-k(l-l_0))\vec{u}_r=\vec{0}$

d'où $\dfrac{d\vec{L}_O}{dt}=\vec{0}$ d'où $\boxed{\vec{L}_O=\vec{cste}}$. On exprime le moment cinétique du palet en coordonnées polaires :

$\vec{L}_O=\vec{OM}\wedge m\vec{V}=l\,\vec{u}_r\wedge m(\dot{l}\,\vec{u}_r+l\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta)=ml^2\dot{\theta}\,\vec{u}_z=mC\,\vec{u}_z$. Le moment cinétique étant constant, on en déduit que $\boxed{C=l^2\dot{\theta}}$ est une constante du mouvement. **C s'appelle la constante des aires.**

2.

2.1. D'après les conditions initiales $\vec{L}_O=\vec{OM}\wedge\vec{0}=\vec{0}$. A tout moment $\vec{OM}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires on en déduit que **la trajectoire est une droite.**

2.2. Pour déterminer *l(t)* , on applique la 2ème loi de Newton au palet : $\boxed{m\vec{a}=\vec{R}_{es}=\vec{F}}$ or $\vec{a}=\ddot{l}\,\vec{u}_r$ ($\vec{u}_r$ étant fixe) d'où $m\ddot{l}=-k(l-l_0)$ équation que l'on peut écrire sous la forme canonique: $\boxed{\ddot{l}+\omega_0^2 l=\omega_0^2 l_0}$ où $\boxed{\omega_0^2=\dfrac{k}{m}}$. La solution est du type : $l(t)=A\cos\omega_0 t+B\sin\omega_0 t+l_0$. On détermine A et B grâce aux conditions initiales :
A t=0, $l(0)=1{,}2\,l_0$ d'où $A=0{,}2\,l_0$ et $v(0)=\dot{l}(0)$ d'où B = 0.

Finalement : $\boxed{l(t)=l_0(1+0{,}2\cos\omega_0 t)}$. $l_{max}=1{,}2\,l_0$ et $l_{min}=0{,}8\,l_0$. Finalement $\boxed{0{,}8\,l_0<l(t)<1{,}2\,l_0}$

3.

3.1. $\vec{L}_O=\vec{OM}_0\wedge\vec{V}_0=l_1\vec{u}_x\wedge m\,l_1\omega_1\vec{u}_y=m\,l_1^2\omega_1\vec{u}_z$ donc $\boxed{C=l_1^2\omega_1}$.

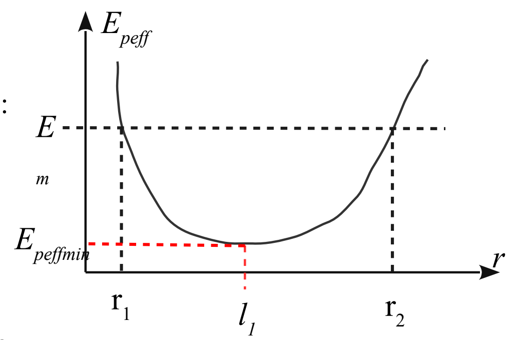
3.2. $\boxed{E_{p_{el}}=\dfrac{1}{2}k(l-l_0)^2}$. Au cours du mouvement l'altitude du palet ne varie pas, l'énergie potentielle de pesanteur est constante , il n'y a donc pas lieu d'en tenir compte.

3.3. La résultante des forces est conservative donc E_m est constante. $\boxed{E_m=E_C+E_{p_{el}}}$

D'après les conditions initiales : $\boxed{E_m=\dfrac{1}{2}m\,v_0^2+\dfrac{1}{2}k(l_1-l_0)^2=\dfrac{1}{2}m(l_1\omega_1)^2+\dfrac{1}{2}k(l_1-l_0)^2}$

En exprimant la vitesse en coordonnées polaires : $\boxed{E_m=\dfrac{1}{2}m(\dot{r}^2+(r\dot{\theta})^2)+\dfrac{1}{2}k(r-l_0)^2}$

$\boxed{E_m=\dfrac{1}{2}m\dot{r}^2+\dfrac{1}{2}m\dfrac{C^2}{r^2}+\dfrac{1}{2}k(r-l_0)^2}$.



3.4. Par identification avec la relation précédente : $\boxed{E_{peff}=\dfrac{1}{2}m\dfrac{C^2}{r^2}+\dfrac{1}{2}k(r-l_0)^2}$. (courbe ci-contre)

3.5. Au cours du mouvement, $\dfrac{1}{2}m\dot{r}^2\geq 0$, on en déduit que $\boxed{E_m\geq E_{peff}}$.

a) E_{peff} présentant des asymptotes infinies , pour un valeur de E_m , on voit que le mouvement est borné entre r_1 et r_2 . **Le palet ne peut pas s'éloigner indéfiniment du point O.**

b) On peut exprimer la vitesse en fonction de la constante des aires : $\vec{v}=\dot{r}\,\vec{u}_r+r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta=\dot{r}\,\vec{u}_r+\dfrac{C}{r}\vec{u}_\theta$. La composante suivant $\vec{u}_r$ peut s'annuler , c'est le cas en r_1 et r_2 . D'après le graphe r ne peut pas s'annuler et $C\neq 0$, la deuxième composante de la vitesse ne peut pas s'annuler. **La vitesse du palet ne peut pas s'annuler au cours du mouvement.**

c) Le palet ne peut pas passer par le point O au cours du mouvement car O est en dehors de la zone où $E_m \geq E_{peff}$.

3.6.

a) $\boxed{C = l_1^2 \omega_1 = r^2 \dot{\theta}}$ si le mouvement est circulaire $r = l_1$ est constant , on en déduit que $\dot{\theta} = \omega_1$ est constante donc le mouvement est uniforme.

b) On applique la 2ème loi de Newton au palet en mouvement circulaire uniforme :

$m\vec{a} = \vec{F}$ or dans la base polaire: $\vec{a} = -l_1 \dot{\theta}^2 \vec{u}_r = -l_1 \omega_1^2 \vec{u}_r$ donc $-m l_1 \omega_1^2 \vec{u}_r = -k(l_1 - l_0)\vec{u}_r$ donc $-m l_1 \omega_1^2 = -k(l_1 - l_0)$ donc $-m l_1 \omega_1^2 = -k l_1 + k l_0$ donc $-l_1 \omega_1^2 = -\omega_0^2 l_1 + \omega_0^2 l_0$ d'où $\boxed{l_1 = \dfrac{\omega_0^2 l_0}{\omega_0^2 - \omega_1^2}}$. Pour que l_1 existe il faut que $\boxed{\omega_1 < \omega_0}$.

c) Cette situation correspond au cas où $E_m = E_{peff}$ à tout moment au cours du mouvement. La valeur correspondante de E_{peff} est $E_{peffmin}$.