1. Force centrale en $\frac{1}{r^4}$ ☺☺

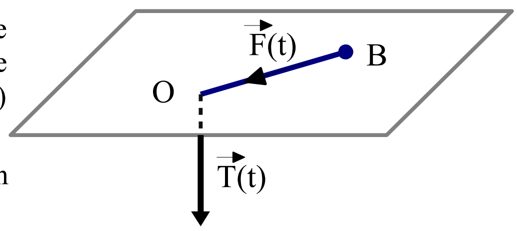
On suppose le référentiel d'étude $R(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ galiléen . Dans ce référentiel, un point matériel M de masse m est soumis à une force centrale $\vec{F} = K\,m\frac{\vec{r}}{r^4}$, où K est une constante , $\vec{r} = \vec{OM}$ et r la distance OM.

A l'instant initial t = 0, le point M se trouve en A de coordonnées polaires $r_0 = a$ et $\theta_0 = 0$; sa vitesse est $\vec{v}_0 = v_0\,\vec{u}_{\theta_0}$ où $v_0 > 0$.

1. Sachant que la force $\vec{F}$ est attractive, quel est le signe de K ?
2. Faire un schéma de la situation initiale . Calculer la constante des aires C, quel est son signe ?
3. Pourquoi peut-on utiliser les coordonnées polaires pour étudier le mouvement du point M ?
4. On repère le point M grâce à ses coordonnées polaires (r, θ), compléter le schéma en représentant les coordonnées polaires et la base polaire associée du point M au cours de son mouvement.
5. Montrer que : $\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{K + C^2}{r^3} = 0$ a) Par application de la 2ème loi de Newton ; b) A partir d'un raisonnement énergétique.
6. Quelle valeur C_0 faut-il donner à C pour que la trajectoire de M soit un cercle de centre O ?

2. Bille sur un plateau ☺☺

Une bille B de masse m mobile sans frottement sur une plaque plane horizontale percée d'un trou au point O est attachée à une extrémité d'un fil de masse négligeable passant par O. On exerce sur l'autre extrémité du fil une traction T(t) telle que la longueur OB = $l(t) = a - bt$, a et b étant des constantes.



A t=0, on communique à la bille B la vitesse angulaire ω_0. On repère la position de B grâce à ses coordonnées polaires (l, θ).

1) Montrer que le mouvement de la bille es un mouvement à force centrale.

2) Montrer que $l^2(t)\frac{d\theta}{dt} = a^2\omega_0$, en déduire que : $\theta(t) - \theta(0) = \frac{a\,\omega_0\,t}{a - bt}$ puis l'équation de la trajectoire et la tracer.

3) Calculer le travail fourni par l'opérateur exerçant la traction T(t) entre l'instant initial et l'instant τ où OP = l(τ).

Rep: $W_{op} = \frac{1}{2} m a^2 \omega_0^2 \left(\frac{a^2}{l^2(\tau)} - 1\right)$

3. Modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène (1913)☺☺

Le « modèle de Bohr » fut le premier modèle qui inclut ***les idées nouvelles de théorie quantique.*** *Selon la description de l'atome par Rutherford, l'électron (de charge q= - e et de masse m) est en rotation circulaire autour du « nucleus » constitué d'un proton (de masse m' >> m et de charge q') supposé fixe en un point O.*

La physique classique prédit qu'il doit émettre un spectre continu de radiations électromagnétiques. Par conséquent, perdant de l'énergie, il doit s'écraser sur le « nucleus » en une fraction de seconde !

Or une analyse de la lumière émise par un atome d'hydrogène avec un spectromètre à prisme par exemple, fait apparaître un spectre de raies discontinues caractéristiques de l'atome!

Bohr compris que l'émission de raies spectrales discontinues traduit un effet quantique apparaissant dans la structure de l'atome. Il postule que:

- *l'électron est capable d'être en orbite autour du « nucleus » sans rayonner d'énergie électromagnétique.*
- *L'électron, en orbite (d'ordre n) autour d'un nucleus, est soumis à la force centrale résultant de l'interaction électrostatique avec le proton:* $\vec{f} = \frac{q\,q'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\vec{u}_r$
- *Les seules orbites possibles sont telles que le module du moment cinétique de l'électron calculé en O soit un multiple entier du rapport* $\frac{h}{2\pi}$ *où h est la constante de Plank soit:* $|\vec{L}_0| = n\frac{h}{2\pi}$.

a) Montrer dans ces conditions que l'électron a un mouvement circulaire uniforme sur chaque orbite de rayon r. On montrera que $v=n\dfrac{h}{2\pi mr}$

b) En appliquant la 2ème loi de Newton à l'électron trouver une deuxième relation entre v et n.

c) En déduire que l'énergie mécanique de l'électron peut s'écrire $E_n=\dfrac{-E_0}{n^2}$ et exprimer E_0. Pourquoi E_n est-elle négative ?

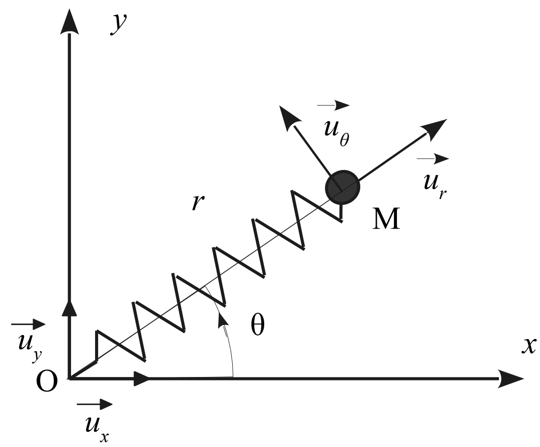
Pour quelle valeur de n l'énergie est-elle la plus basse ?

d) Calculer E_0 en eV sachant que $\dfrac{h}{2\pi}=1{,}055.10^{-34}\,J.s^{-1}$, $m = 9{,}1.10^{-31}kg$, $e = 1{,}6.10^{-19}\,C$ et $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}=9.10^{9}\,SI$

Rep c) : $E_0=\dfrac{me^4}{8h^2\varepsilon_0^2}$

4. Mouvement d'un palet accroché à un ressort ☺☺

Un palet de masse m assimilé à un point matériel M peut se mouvoir sans frottement dans le plan (Oxy) **horizontal** (table à coussin d'air par exemple) représenté ci-contre.



- Le champ de pesanteur est $\vec{g}=-g\,\vec{u}_z$.
- Le mouvement est étudié dans le référentiel R du laboratoire supposé galiléen de repère d'espace $R(0,\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$.
- La masse m attachée à l'extrémité d'un ressort dont l'autre extrémité est fixe en O, se déplace sans frottement dans le plan horizontal $(0,\vec{u}_x,\vec{u}_y)$
- Le ressort a une constante de raideur k et une longueur à vide ℓ_0,
- Le ressort est supposé resté constamment rectiligne.
- La position du point M est repérée par ses coordonnées polaires (r, θ) , r étant égal à la longueur instantanée ℓ du ressort.

1. Effectuer l'inventaire des forces appliquées au palet. Montrer qu'il y a conservation du moment cinétique du palet $\vec{L_O}$ par rapport au point O. En déduire que $C=\ell^2\dot{\theta}$ est une constante du mouvement. Comment s'appelle cette constante ?

2. A la date t=0, le palet est lâché sans vitesse initiale, le ressort ayant la longueur $\ell(0) = 1{,}2\ell_0$.

 2.1. Calculer $\vec{L_O}$. En déduire la nature de la trajectoire.

 2.2. Déterminer l'expression de la longueur instantanée $\ell(t)$ du ressort au cours du temps en utilisant les paramètres $\omega_0=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ et ℓ_0. Quel est l'intervalle de variation de $\ell(t)$?

3. On lance maintenant le palet depuis un point M_0 situé sur l'axe (Ox), distant de ℓ_1 du point O avec un vecteur vitesse initial $\vec{v}_0=\ell_1\omega\,\vec{u}_y$, ω étant une constante positive.

 3.1. Calculer $\vec{L_O}$. En déduire l'expression de C en fonction de ℓ_1 et ω .

 3.2. Rappeler l'expression de l'énergie potentielle élastique associée à la force de rappel exercée par le ressort sur le palet. Y-a-t-il lieu de tenir compte de l'énergie potentielle de pesanteur ? Justifier.

 3.3. Montrer qu'il y a conservation de l'énergie mécanique E_m du palet au cours du mouvement. Donner l'expression de E_m en fonction des conditions initiales puis de r , $\dot{r}$, $\dot{\theta}$, k , m , et ℓ_0.

 3.4. Montrer que l'énergie mécanique peut se mettre sous la forme : $E_m=\dfrac{1}{2}m\dot{r}^2+E_{peff}(r)$. Donner l'expression de $E_{peff}(r)$ en fonction de C, r , m , k et ℓ_0, puis tracer la courbe correspondante.

 3.5. En déduire les réponses argumentées aux questions suivantes :

 a) Le palet peut-il s'éloigner indéfiniment du point O ?

 b) La vitesse du palet peut-elle s'annuler au cours du mouvement ?

 c) Le palet peut-il passer par le point O au cours du mouvement ?

 3.6. On cherche à déterminer une relation entre ℓ_1 et ω pour que le palet ait un mouvement circulaire.

 a) Montrer que dans ce cas le mouvement est nécessairement uniforme.

 b) Déterminer ℓ_1 en fonction de ω_0 , ω et ℓ_0. Ce résultat est-il possible pour toute valeur de ω ?