1. Détermination de la masse d'un astre

Au cours de la mission APOLLO XVII en 1972, le module de commande en orbite circulaire autour de la lune à une distance *R = 2040 km* du centre de celle-ci, avait une période de *T = 8240 s* dans le référentiel Sélénocentrique. Calculer la masse m_L de la Lune.

Données : G = 6,67.10^{-11} SI

Rep : $m_L \approx 7{,}40.10^{22}\ kg$

Solution :

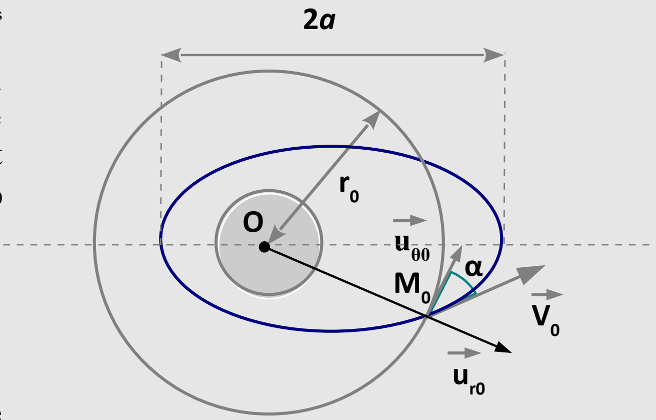
$\frac{T^2}{R^3}=\frac{4\pi^2}{G m_L}$ d'où $m_L=\frac{4\pi^2 R^3}{G T^2}$. AN : $m_L=\frac{4\pi^2(2040.10^3)^3}{G\,8240^2}\approx 7{,}40.10^{22}\ kg$

2. lancement raté

On désire effectuer le lancement d'un satellite de masse m_s de façon à avoir une orbite circulaire.

On suppose que le lancement du satellite est manqué et qu'au point d'injection sur orbite M_0 le vecteur vitesse a bien même module V_0 que pour l'orbite circulaire de rayon r_0 mais fait un angle $0 < \alpha < \pi/2$ avec la direction prévue. On notera r_0 la distance OM_0.

Le dispositif est représenté ci-contre.



1) Montrer que $V_0=\sqrt{\frac{G M_T}{r_0}}$ où G est la constante de gravitation universelle, et M_T la masse de la terre.

2) Exprimer l'énergie mécanique E_m du satellite en fonction de m_s ,G, M_T et r_0. La trajectoire du satellite est nécessairement elliptique, pourquoi ? En déduire le demi grand axe *a* de l'ellipse.

3) Montrer grâce aux conditions initiales que la constante des aires caractérisant le mouvement du satellite est : $C=r_0 v_0 \cos\alpha$.

4) Montrer qu'au périgée et à l'apogée $Em=\frac{1}{2}m_s\frac{C^2}{r^2}-\frac{G M_T m_s}{r}$ r étant la distance au centre O du périgée ou de l'apogée.

5) Déduire de la question précédente les distances r_P et r_A au centre O de la terre du périgée et de l'apogée de la trajectoire en fonction de r_0 et α.

6) Déduire de la question précédentes les vitesses V_A et V_P à l'apogée et au périgée.

Rep: :5) $r_P=r_0(1-\sin\alpha)$, $r_A=r_0(1+\sin\alpha)$

Solution

1) Sur une orbite circulaire $Em=\frac{-G M_T m_s}{2r_0}=\frac{1}{2}m_s V_0^2-\frac{G M_T m_s}{r_0}$ d'où $V_0=\sqrt{\frac{GM_T}{r_0}}$

2)L'énergie mécanique du satellite est la même que sur la trajectoire circulaire de rayon r_0 : $\boxed{Em=\frac{-G M_T m_s}{2r_0}}$

donc Em < 0 et donc la trajectoire est elliptique en raison des conditions initiales. Dans le cas d'un mouvement elliptique $Em=\frac{-G M_T m_s}{2a}$ donc par identification: $\boxed{a=r_0}$

3) On a un mouvement à force centrale, le moment cinétique se conserve au cours du mouvement:

$\vec{L}_0=\vec{OM}_0\wedge m\vec{V}_0=m r_0 V_0\cos\alpha\,\vec{u}_z=m r^2\dot{\theta}\vec{u}_z=mC\vec{u}_z$ par identification: $\boxed{C=r_0 V_0\cos\alpha}$

4) Au périgée et à l'apogée la vitesse est suivant $\vec{u_\theta}$. L'expression générale de la vitesse en coordonnées polaires est : $\vec{v}=\dot{r}\vec{u_r}+r\dot{\theta}\vec{u_\theta}$ donc au périgée et à l'apogée $\vec{v}=r\dot{\theta}\vec{u_\theta}=\frac{C^2}{r}\vec{u_\theta}$ on en déduit

$$\boxed{Em=E_C+E_P=\frac{1}{2}m_s\frac{C^2}{r^2}-\frac{GM_Tm_s}{r}}$$

5) r_A et r_P vérifient l'équation : $\frac{-GM_Tm_s}{2r_0}=\frac{1}{2}m_s\frac{C^2}{r^2}-\frac{GM_Tm_s}{r}$ or $C^2=(r_0V_0\cos\alpha)^2=r_0GM_T\cos^2\alpha$ d'où

$\frac{-GM_Tm_s}{2r_0}=\frac{1}{2}m\frac{r_0GM_T\cos^2\alpha}{r^2}-\frac{GM_Tm_s}{r}$ d'où $\frac{-1}{r_0}=\frac{r_0\cos^2\alpha-2r}{r^2}$ d'où $\boxed{r^2-2r_0r+r_0^2\cos^2\alpha=0}$.

$\Delta=4r_0^2(1-\cos^2\alpha)=4r_0^2\sin^2\alpha$ on en déduit : $\boxed{r_P=r_0(1-\sin\alpha)}$ et $\boxed{r_A=r_0(1+\sin\alpha)}$

6) $C=r_AV_A=r_0V_0\cos\alpha$ d'où $V_A=\frac{r_0V_0\cos\alpha}{r_A}$ d'où $\boxed{V_A=\frac{V_0\cos\alpha}{1+\sin\alpha}}$ de même $\boxed{V_P=\frac{V_0\cos\alpha}{1-\sin\alpha}}$

3. Trajectoire d'une comète

Pour cet exercice, on rappelle que la terre décrit autour du soleil une orbite quasi-circulaire de rayon R_0=150millions de km en T_0= 365,25 jours.

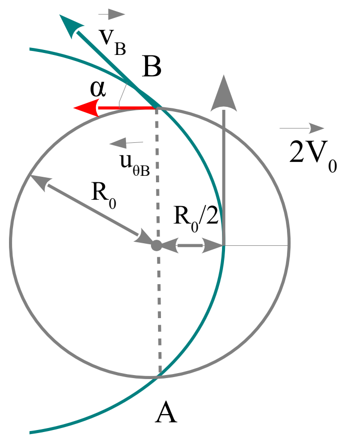
1. Déterminer la vitesse V_0 de la terre.
2. Une comète dont la trajectoire est coplanaire à l'orbite de la terre a une masse m_c. Son périhélie (point de sa trajectoire le plus proche du soleil) se trouve à la distance $R_0/2$du soleil et la vitesse de la comète en ce point est $2V_0$.

a) Grâce aux caractéristiques cinématiques de la comète au périhélie, montrer que son énergie mécanique est nulle, en déduire la nature de sa trajectoire .

b) Exprimer la vitesse v de la comète en fonction de sa distance r au centre du soleil.

Rep: b) $v=V_0(2R_0/r)^{1/2}$

Solution :



1. $V_0=\frac{2\pi R_0}{T_0}$

2a. On calcule l'énergie mécanique de la comète grâce à ses caractéristiques au périhélie:

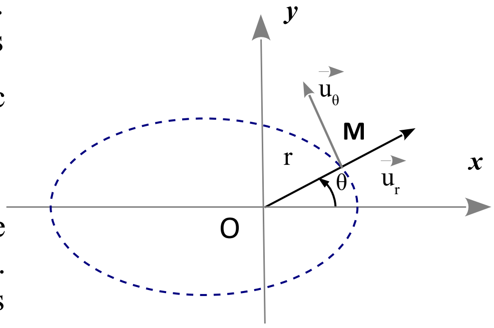
$Em(Comète)=\frac{1}{2}m_c(2V_0)^2-\frac{GM_sm_c}{\frac{R_0}{2}}$ or V_0 est la vitesse de la terre sur son orbite circulaire on la calcule en exprimant l'énergie de la terre sur son orbite:

$Em(Terre)=\frac{-GM_sm_T}{2R_0}=\frac{1}{2}m_TV_0^2-\frac{GM_sm_T}{R_0}$ d'où $V_0^2=\frac{GM_s}{R_0}$ en remplaçant l'expression de V_0^2 dans l'expression de Em(comète) on trouve : $\boxed{Em(Comète)=0}$. **On en déduit que la trajectoire de la comète est parabolique.**

2b. $Em(Comète)=\frac{1}{2}m_c(v)^2-\frac{GM_sm_c}{r}=0$ or $V_0^2R_0=GM_s$ on en déduit que : $\boxed{v=V_0\sqrt{\frac{2R_0}{r}}}$

4. Mise en orbite géostationnaire

Un satellite terrestre décrit une trajectoire elliptique dans le plan équatorial. On repère sa position grâce au point M de coordonnées polaires (r, θ). La trajectoire est représentée ci-contre.



Le point O est le centre de la terre. En utilisant les coordonnées polaires définies sur le schéma, la trajectoire a pour équation : $r=\dfrac{p}{1+e\cos\theta}$ avec e = 0,72 l'excentricité et p = 11800 km le paramètre de l'ellipse.

1) Positionner l'apogée et le périgée sur le schéma.

2) En utilisant l'équation de la trajectoire, exprimer les rayons r_A et r_P de l'apogée et du périgée de la trajectoire du satellite en fonction de *p* et *e*. Faire les applications numériques et calculer les altitudes correspondantes.

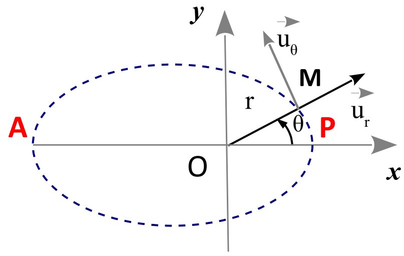
3) Montrer que la vitesse à l'apogée V_A peut se mettre sous la forme : $V_A=\sqrt{\dfrac{2GM_Tr_P}{r_A(r_A+r_P)}}$. En déduire l'expression V_P de la vitesse au périgée en fonction des mêmes paramètres. Faire les applications numériques. Quelle caractéristique principale a chacune de ces deux vitesses ?

3- Quelle variation de vitesse faut-il communiquer à l'apogée pour rendre le satellite géostationnaire ?

Données: la masse de la Terre : M_T = 6,0.10^24 kg , la constante de gravitation G = 6,67.10^-11 SI , le rayon de la Terre R = 6400 km.

Solution :

1) ci-contre.



2) en P θ = 0 et en A θ = π. On en déduit : $\boxed{r_P=\dfrac{p}{1+e}}$, et $\boxed{r_A=\dfrac{p}{1-e}}$.

Applications numériques :

$\boxed{r_P=\dfrac{11800}{1+0{,}72}=6860\ km}$ et $\boxed{r_A=\dfrac{11800}{1-0{,}72}=42142\ km}$ et les altitudes correspondantes :

$\boxed{h_P=r_P-R=6860-6400=460\ km}$ et $\boxed{h_A=r_A-R=42142-6400=35742\approx 35700\ km}$

3) On calcule la vitesse à l'apogée en expriment l'énergie mécanique : $Em=\dfrac{-GM_Tm_s}{(r_A+r_P)}=\dfrac{1}{2}m_sV_A^2-\dfrac{GM_Tm_s}{r_A}$ d'où

$V_A=\sqrt{\dfrac{-2GM_T}{r_A+r_P}+\dfrac{2GM_T}{r_A}}=\sqrt{2GM_T\left(\dfrac{-1}{r_A+r_P}+\dfrac{1}{r_A}\right)}$ d'où $\boxed{V_A=\sqrt{\dfrac{2GM_Tr_P}{r_A(r_A+r_P)}}}$ et $\boxed{V_P=\sqrt{\dfrac{2GM_Tr_A}{r_P(r_A+r_P)}}}$

AN : $V_A=\sqrt{\dfrac{2\times 6{,}67.10^{-11}\times 6{,}0.10^{24}\times 6860}{(42142+6860)\times 42142.10^3}}$ d'où $\boxed{V_A=1631\ m.s^{-1}\approx 1{,}6\ km.s^{-1}}$. C'est la vitesse **minimale.**

et $V_P=\sqrt{\dfrac{2\times 6{,}67.10^{-11}\times 6{,}0.10^{24}\times 42142}{(42142+6860)\times 6860.10^3}}$ d'où $\boxed{V_P=10017\ m.s^{-1}\approx 10\ km.s^{-1}}$. C'est la vitesse **maximale.**

4) D'après la 3ème loi de Képler, sur l'orbite géostationnaire circulaire de rayon R_0 : $\dfrac{T^2}{R_0^3}=\dfrac{4\pi^2}{GM_T}$ (1) de plus la vitesse V_0 sur cette orbite est constante donc $R_0=\dfrac{V_0}{\omega}=\dfrac{V_0T}{2\pi}$ en remplaçant dans l'expression (1) on obtient :

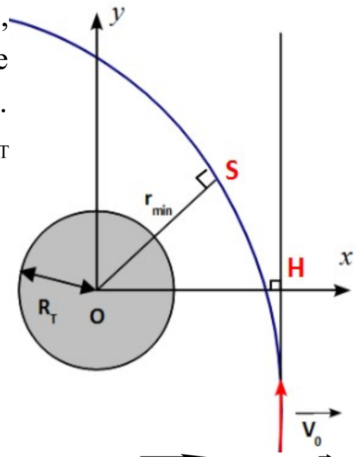
$V_0=\left[\dfrac{2\pi GM_T}{T}\right]^{\frac{1}{3}}$. AN : $V_0=\left[\dfrac{2\pi\times 6{,}67.10^{-11}\times 6{,}0.10^{24}}{86400}\right]^{\frac{1}{3}}$ d'où $\boxed{V_0=3051\ m.s^{-1}}$. v=d/T=(2 pi R) /T

Le supplément de vitesse est : $\boxed{\Delta V=V_0-V_A=3051-1631=1420\ m.s^{-1}\approx 1{,}4\ km.s^{-1}}$

5. Distance de plus courte approche

Un météore, point matériel M de masse m négligeable devant la masse M_T de la Terre, de centre O , arrive de l'infini avec la vitesse v_0 par rapport à la Terre. M décrit une branche d'hyperbole de foyer O . Son paramètre d'impact est OH = b (voir la figure) . Calculer sa distance r_{min} de plus courte approche de la Terre, en fonction de v_0 , b , M_T , G constante de gravitation et R_T rayon de la Terre.

Rep : $r_{min}=-GM_T/v_0^2 + [(GM_T/v_0^2)^2 + b^2]^{1/2}$



Solution

- Le météore est soumis à une force centrale, son moment cinétique se conserve au cours du mouvement: $\boxed{\vec{L}_\infty=\vec{L}_S}$.

$\vec{L}_\infty=\overrightarrow{OM}_\infty\wedge m\vec{v}_0=(\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HM}_\infty)\wedge m\vec{v}_0=\overrightarrow{OH}\wedge m\vec{v}_0+\overrightarrow{HM}_\infty\wedge m\vec{v}_0=b\vec{u}_x\wedge m v_0\vec{u}_y+\vec{0}=mb\,v_0\vec{u}_z$ ($\overrightarrow{HM}_\infty\wedge m\vec{v}_0=\vec{0}$ car les deux vecteurs sont collinéaires)

$\vec{L}_S=\overrightarrow{OS}\wedge m\vec{v}_s=r_{min}m\,v_s\vec{u}_z$ d'où: $\boxed{b\,v_0=r_{min}v_s}$ (1).

- Une force centrale est une force conservative donc l'énergie mécanique du météore se sonserve: $\boxed{E_{m\infty}=E_{mS}}$

$E_{m\infty}=\frac{1}{2}m v_0^2-\frac{G M_T m}{r_\infty}=\frac{1}{2}m v_0^2$ et $E_{ms}=\frac{1}{2}m v_s^2-\frac{G M_T m}{r_{min}}$ d'où: $\frac{1}{2}m v_s^2-\frac{G M_T m}{r_{min}}=\frac{1}{2}m v_0^2$ d'où

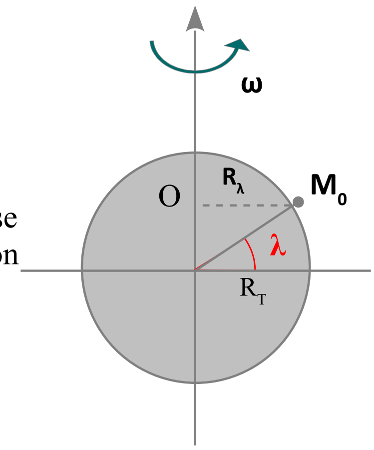
$v_s^2-v_0^2=\frac{2 G M_T}{r_{min}}$ or $v_s=\frac{b\,v_0}{r_{min}}$ d'après (1) d'où $\left(\frac{b\,v_0}{r_{min}}\right)^2-v_0^2=\frac{2 G M_T}{r_{min}}$. En réduisant au même dénominateur, on obtient un polynome du 2nd degré : $r_{min}^2+\frac{2 G M_T}{v_0^2}r_{min}-b^2=0$. $\Delta=\left(\frac{2 G M_T}{v_0^2}\right)^2+4b^2$ $r_{min}>0$ doù:

$$\boxed{r_{min}=\frac{-\frac{2 G M_T}{v_0^2}+\sqrt{\left(\frac{2 G M_T}{v_0^2}\right)^2+4b^2}}{2}=-\frac{G M_T}{v_0^2}+\sqrt{\left(\frac{G M_T}{v_0^2}\right)^2+b^2}}.$$

6. Énergie de mise sur orbite d'un satellite terrestre

Un satellite terrestre de masse m est lancé d'une base M_0 située à la latitude λ . Quelle énergie ΔE faut-il lui fournir pour le placer sur une orbite circulaire de rayon r ? On exprimera ΔE en fonction de m , λ, g_0 intensité du champ de pesanteur au sol, R_T rayon terrestre et ω_T vitesse de rotation de la Terre dans le référentiel géocentrique . Commentez l'expression obtenue.

Rep : $\Delta E = m\left[g_0 R_T\left(1-\frac{R_T}{2r}\right)-\frac{1}{2}\omega_T^2 R_T^2\cos^2\lambda\right]$



Solution

A la surface de la terre le satellite a un mouvement circulaire uniforme à la vitesse angulaire ω_T et de rayon R_λ. Sa vitesse est $V_S = \omega_T R_\lambda = \omega_T R_T.\cos\lambda$. On en déduit son énergie cinétique: $E_C = \frac{1}{2} m V_S^2 = \frac{1}{2} m \omega_T^2 R_T^2 \cos^2\lambda$

Il subit l'attraction terrestre son énergie potentielle est: $E_p = \frac{-G M_T m}{R_T} = -m g_0 R_T$

On en déduit son énergie mécanique: $\boxed{E_1 = \frac{1}{2} m \omega_T^2 R_T^2 \cos^2\lambda - m g_0 R_T}$

Sur l'orbite de rayon r le satellite se déplace sous l'action de l'interaction gravitationnelle, son énergie est: $\boxed{E_2 = \frac{-G M_T m}{2r} = -m g_0 \frac{R_T^2}{2r}}$.

L'énergie à communiquer est: $\Delta E = E_2 - E_1 = -m g_0 \frac{R_T^2}{2r} - \frac{1}{2} m \omega_T^2 R_T^2 \cos^2\lambda + m g_0 R_T$ d'où :

$$\boxed{\Delta E = m\left[g_0 R_T\left(1-\frac{R_T}{2r}\right)-\frac{1}{2}\omega_T^2 R_T^2\cos^2\lambda\right]}$$

L'énergie la plus faible à fournir correspond à $\lambda = 0$ cad au niveau de l'équateur d'où la base de lancement à Kourou en Guyane.