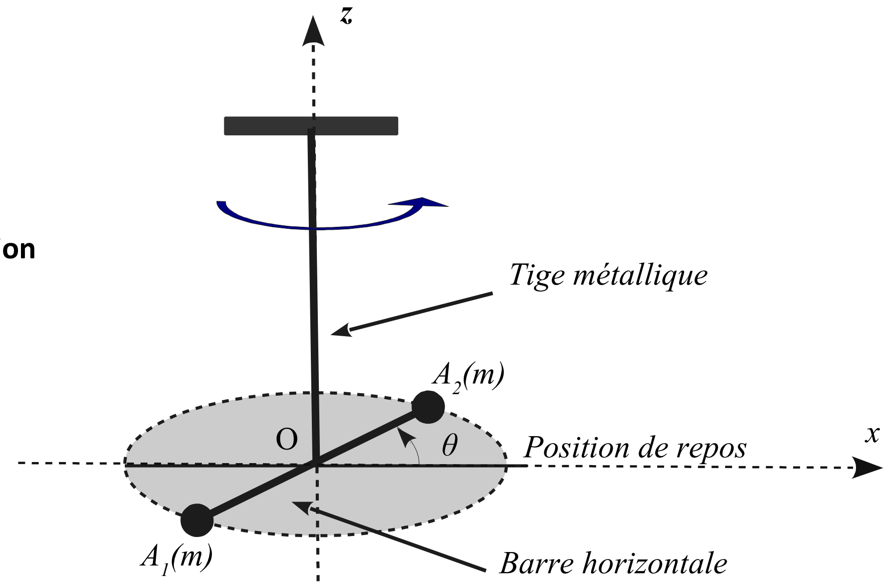
# Étude d'un pendule de torsion

Le pendule de torsion *( représentée figure 1)* est constitué par une barre horizontale de longueur $2d$ suspendue en son centre O à l'extrémité inférieure d'un fil métallique dont l'extrémité supérieure est reliée à un support fixe. La barre peut tourner autour de l'axe $Oz$ vertical ascendant matérialisé par le fil. Le fil métallique exerce sur la barre une action mécanique de rappel dont le moment par rapport à l'axe $Oz$ est $\Gamma_{Oz} = -C\theta$ où $\theta$ est l'angle que fait la barre par rapport à sa position d'équilibre et C la constante de torsion du fil.

Aux extrémités de la barre horizontale repérées par les points $A_1$ et $A_2$ sont fixées deux masse $m$ identiques.

*Figure 1 :* **pendule de torsion**



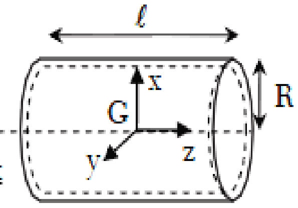
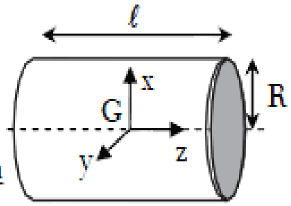
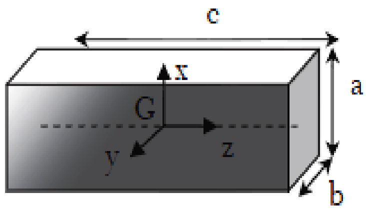
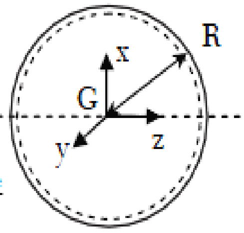
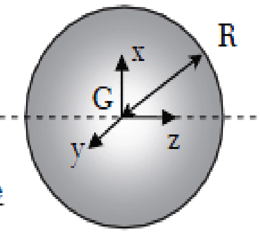

On note $J = 2md^2$ le moment d'inertie du système $S$ constitué par la barre horizontale et les deux masses $m$ par rapport à l'axe $Oz$.

Le référentiel terrestre de repère d'espace $R(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ est considéré comme galiléen.

On écarte légèrement la barre d'un angle $\theta_0$ par rapport à sa position d'équilibre et on la lâche sans vitesse initiale. Le système se met à osciller sans frottement à la période $T_0$ autour de l'axe $(Oz)$.

1. Justifier l'expression du moment d'inertie du système (S).
2. En appliquant le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe *(Oz)* au système *(S)*, établir l'équation différentielle du mouvement en $\theta$ du système *(S)* puis la résoudre.
3. En déduire la constante de torsion $C$ du fil de torsion en fonction de $m$, $d$ et $T_0$.
4. A partir de l'équation différentielle du mouvement établir l'intégrale première de l'énergie, en déduire l'énergie potentielle dont dérivent les actions de rappel.

# Moments d'inertie de quelques solides homogènes autour de leur axe de symétrie

| *Solide homogène de centre G de masse M* | *Moments d'inertie.* |
|---|---|
| **Cylindre creux**  | $I_{Gx} = I_{Gy} = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{12}M\ell^2$<br>$I_{Gz} = MR^2$ |
| **Cylindre plein**  | $I_{Gx} = I_{Gy} = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}M\ell^2$<br>$I_{Gz} = \frac{1}{2}MR^2$ |
| **Parallélépipède rectangle**  | $I_{Gx} = \frac{1}{12}M\left[b^2 + c^2\right]$<br>$I_{Gy} = \frac{1}{12}M\left[a^2 + c^2\right]$<br>$I_{Gz} = \frac{1}{12}M\left[a^2 + b^2\right]$ |
| **Sphère creuse**  | $I_{Gx} = I_{Gy} = I_{Gz} = \frac{2}{3}MR^2$ |
| **Boule pleine**  | $I_{Gx} = I_{Gy} = I_{Gz} = \frac{2}{5}MR^2$ |