

3. Lancé raté

1) Sur une orbite circulaire $Em = \frac{-GM_T m_s}{2r_0} = \frac{1}{2} m_s V_0^2 - \frac{GM_T m_s}{r_0}$ d'où $V_0 = \sqrt{\frac{GM_T}{r_0}}$

2) L'énergie mécanique du satellite est la même que sur la trajectoire circulaire de rayon r_0 : $Em = \frac{-GM_T m_s}{2r_0}$

donc $Em < 0$ et donc la trajectoire est elliptique en raison des conditions initiales. Dans le cas d'un mouvement elliptique $Em = \frac{-GM_T m_s}{2a}$ donc par identification: $a = r_0$

3) On a un mouvement à force centrale, le moment cinétique se conserve au cours du mouvement:

$$\vec{L}_0 = \vec{OM}_0 \wedge m_s \vec{V}_0 = m_s r_0 V_0 \cos \alpha \vec{u}_z = m_s r^2 \dot{\theta} \vec{u}_z = m_s C \vec{u}_z \text{ par identification: } C = r_0 V_0 \cos \alpha$$

4) Au périégée et à l'apogée la vitesse est suivant $\vec{u}_0$. L'expression générale de la vitesse en coordonnées polaires est : $\vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta$ donc au périégée et à l'apogée $\vec{v} = r \dot{\theta} \vec{u}_\theta = \frac{C}{r} \vec{u}_\theta$ on en déduit

$$Em = E_c + E_p = \frac{1}{2} m_s \frac{C^2}{r^2} - \frac{GM_T m_s}{r}$$

5) r_A et r_P vérifient l'équation : $\frac{-GM_T m_s}{2r_0} = \frac{1}{2} m_s \frac{C^2}{r^2} - \frac{GM_T m_s}{r}$ or $C^2 = (r_0 V_0 \cos \alpha)^2 = r_0 GM_T \cos^2 \alpha$ d'où

$$\frac{-GM_T m_s}{2r_0} = \frac{1}{2} m_s \frac{r_0 GM_T \cos^2 \alpha}{r^2} - \frac{GM_T m_s}{r} \text{ d'où } \frac{-1}{r_0} = \frac{\cos^2 \alpha}{r^2} - \frac{2}{r} \text{ d'où } r^2 - 2r_0 r + r_0^2 \cos^2 \alpha = 0$$

$$\Delta = 4r_0^2(1 - \cos^2 \alpha) = 4r_0^2 \sin^2 \alpha \text{ on en déduit : } r_P = r_0(1 - \sin \alpha) \text{ et } r_A = r_0(1 + \sin \alpha)$$

6) $C = r_A V_A = r_0 V_0 \cos \alpha$ d'où $V_A = \frac{r_0 V_0 \cos \alpha}{r_A}$ d'où $V_A = \frac{V_0 \cos \alpha}{1 + \sin \alpha}$ de même $V_P = \frac{V_0 \cos \alpha}{1 - \sin \alpha}$

4. Trajectoire d'une comète

1. $V_0 = \frac{2\pi R_0}{T_0}$

2a. On calcule l'énergie mécanique de la comète grâce à ses caractéristiques au périhélie:

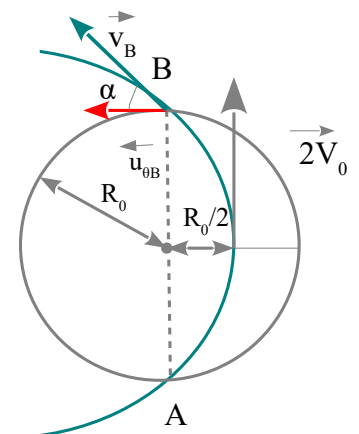
$$Em(\text{Comète}) = \frac{1}{2} m_c (2V_0)^2 - \frac{GM_s m_c}{\frac{R_0}{2}} \text{ or } V_0 \text{ est la vitesse de la}$$

terre sur son orbite circulaire on la calcule en exprimant l'énergie de la terre sur son orbite:

$$Em(\text{Terre}) = \frac{-GM_s m_T}{2R_0} = \frac{1}{2} m_T V_0^2 - \frac{GM_s m_T}{R_0} \text{ d'où } V_0^2 = \frac{GM_s}{R_0}$$

en remplaçant l'expression de V_0^2 dans l'expression de $Em(\text{comète})$ on trouve : $Em(\text{Comète}) = 0$. On en déduit que la trajectoire de la comète est parabolique.

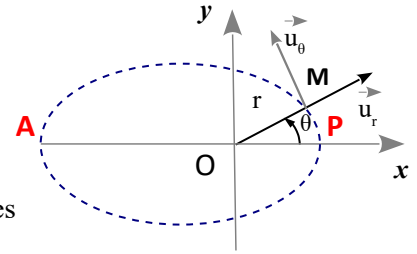
2b. $Em(\text{Comète}) = \frac{1}{2} m_c (v)^2 - \frac{GM_s m_c}{r} = 0$ or $V_0^2 R_0 = GM_s$ on en déduit que : $v = V_0 \sqrt{\frac{2R_0}{r}}$



5. Mise en orbite géostationnaire

1) ci-contre.

2) en P $\theta = 0$ et en A $\theta = \pi$. On en déduit : $r_P = \frac{p}{1+e}$, et $r_A = \frac{p}{1-e}$.



Applications numériques :

$$r_P = \frac{11800}{1+0,72} = 6860 \text{ km} \quad \text{et} \quad r_A = \frac{11800}{1-0,72} = 42142 \text{ km} \quad \text{et les altitudes}$$

correspondantes :

$$h_P = r_P - R = 6860 - 6400 = 460 \text{ km} \quad \text{et} \quad h_A = r_A - R = 42142 - 6400 = 35742 \approx 35700 \text{ km}$$

3) On calcule la vitesse à l'apogée en exprimant l'énergie mécanique : $E_m = \frac{-G M_T m_s}{(r_A + r_P)} = \frac{1}{2} m_s V_A^2 - \frac{G M_T m_s}{r_A}$ d'où

$$V_A = \sqrt{\frac{-2 G M_T}{r_A + r_P} + \frac{2 G M_T}{r_A}} = \sqrt{2 G M_T \left(\frac{-1}{r_A + r_P} + \frac{1}{r_A} \right)} \quad \text{d'où} \quad V_A = \sqrt{\frac{2 G M_T r_P}{r_A (r_A + r_P)}} \quad \text{et} \quad V_P = \sqrt{\frac{2 G M_T r_A}{r_P (r_A + r_P)}}$$

$$\text{AN : } V_A = \sqrt{\frac{2 \times 6,67 \cdot 10^{-11} \times 6,0 \cdot 10^{24} \times 6860}{(42142 + 6860) \times 42142 \cdot 10^3}} \quad \text{d'où} \quad V_A = 1631 \text{ m.s}^{-1} \approx 1,6 \text{ km.s}^{-1} \quad \text{C'est la vitesse minimale.}$$

$$\text{et } V_P = \sqrt{\frac{2 \times 6,67 \cdot 10^{-11} \times 6,0 \cdot 10^{24} \times 42142}{(42142 + 6860) \times 6860 \cdot 10^3}} \quad \text{d'où} \quad V_P = 10017 \text{ m.s}^{-1} \approx 10 \text{ km.s}^{-1} \quad \text{C'est la vitesse maximale.}$$

4) D'après la 3ème loi de Képler, sur l'orbite géostationnaire circulaire de rayon R_0 : $\frac{T^2}{R_0^3} = \frac{4 \pi^2}{G M_T}$ (1) de plus la vitesse V_0

sur cette orbite est constante donc $R_0 = \frac{V_0}{\omega} = \frac{V_0 T}{2 \pi}$ en remplaçant dans l'expression (1) on obtient :

$$V_0 = \left[\frac{2 \pi G M_T}{T} \right]^{\frac{1}{3}} \quad \text{AN : } V_0 = \left[\frac{2 \pi \times 6,67 \cdot 10^{-11} \times 6,0 \cdot 10^{24}}{86400} \right]^{\frac{1}{3}} \quad \text{d'où} \quad V_0 = 3051 \text{ m.s}^{-1} \quad v = d/T = (2 \pi R) / T$$

$$\text{Le supplément de vitesse est : } \Delta V = V_0 - V_A = 3051 - 1631 = 1420 \text{ m.s}^{-1} \approx 1,4 \text{ km.s}^{-1}$$

6. Mise sur orbite d'un satellite terrestre

1) L'axe de rotation est l'axe nord-sud. L'axe de rotation est fixe dans le référentiel géocentrique.

La période de révolution de la terre est $T = 24 \text{ h} = 86400 \text{ s}$.

$$\Omega = \frac{2 \pi}{T} = \frac{2 \pi}{86400} = 7,27 \cdot 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$$

2) A la surface de la terre le point P a un mouvement circulaire uniforme à la vitesse angulaire Ω et de rayon R_λ . Sa vitesse est $V_P = \Omega R_\lambda = \Omega R_T \cos \lambda$.

3) L'énergie cinétique du satellite est $E_C = \frac{1}{2} m V_P^2 = \frac{1}{2} m \Omega^2 R_T^2 \cos^2 \lambda$.

Il subit l'attraction terrestre son énergie potentielle est : $E_P = \frac{-G M_T m}{R_T} = -m g_0 R_T$

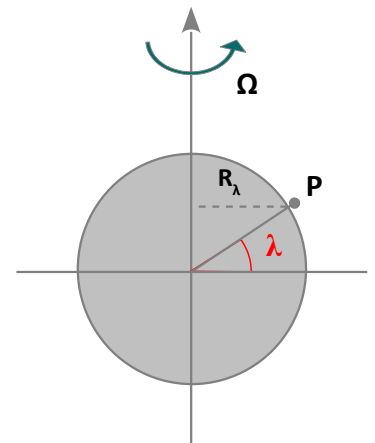
$$\text{On en déduit son énergie mécanique : } E_{m0} = \frac{1}{2} m \Omega^2 R_T^2 \cos^2 \lambda - m g_0 R_T$$

4) L'énergie initiale augmente quand la latitude diminue, le point de lancement le plus adapté est Kourou.

5) Sur une orbite basse de rayon $r \approx R_T$ le satellite se déplace sous l'action de l'interaction gravitationnelle, son énergie

$$\text{mécanique est : } E_{mF} = \frac{-G M_T m}{2 R_T} = -m g_0 \frac{R_T}{2}$$

L'énergie à communiquer est : $\Delta E = E_{mF} - E_{m0} = -m g_0 \frac{R_T}{2} - \frac{1}{2} m \Omega^2 R_T^2 \cos^2 \lambda + m g_0 R_T$ d'où :



$$\Delta E = \frac{m R_T}{2} [g_0 - R_T \Omega^2 \cos^2 \lambda]$$

AN:

$$\Delta E = \frac{5,8 \cdot 10^3 \times 6400 \cdot 10^3}{2} [9,81 - 6400 \cdot 10^3 (7,27 \cdot 10^{-5} \times \cos(5,2))^2] = 1,81 \cdot 10^{11} \text{ J}$$

6) $1 \text{ kWh} = 10^3 \times 3600 = 3,6 \cdot 10^6 \text{ J}$. L'énergie dépensée pour 1kg est $\frac{\Delta E}{m} = \frac{1,81 \cdot 10^{11}}{5,8 \cdot 10^3} = 3,13 \cdot 10^7 \text{ J/kg}$.

$3,6 \cdot 10^6 \text{ J}$ coûte 0,15 euros d'où pour $3,13 \cdot 10^7 \text{ J}$: **coût: $\frac{3,13 \cdot 10^7 \times 0,15}{3,6 \cdot 10^6} = 1,30 \text{ euros par kg}$** . Le plus coûteux n'est pas l'énergie !

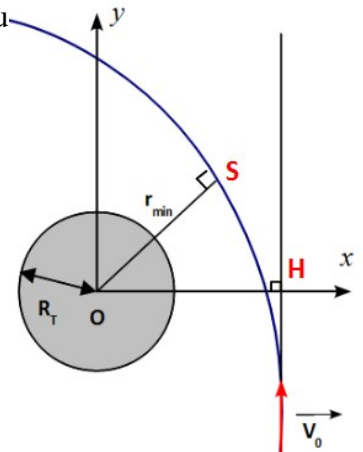
7) La différence énergétique entre la latitude λ_K et λ_B est: $\Delta E_B - \Delta E_K = \frac{m R_T^2 \Omega^2}{2} (\cos^2 \lambda_K - \cos^2 \lambda_B)$

$$\Delta E_B - \Delta E_K = \frac{5,8 \cdot 10^3 (6400 \cdot 10^3 \times 7,27 \cdot 10^{-5})^2}{2} (\cos^2 5,2 - \cos^2 46) = 3,20 \cdot 10^8 \text{ J} \quad \text{Soit}$$

coût: $\frac{3,20 \cdot 10^8 \times 0,15}{3,6 \cdot 10^6} = 13,3 \text{ euros}$. Le coût est insignifiant !

7. Distance de plus courte approche

Le météore est soumis à une force centrale, son moment cinétique se conserve au cours du mouvement: $\vec{L}_\infty = \vec{L}_S$.



$\vec{L}_\infty = \vec{OM}_\infty \wedge m \vec{v}_0 = (\vec{OH} + \vec{HM}_\infty) \wedge m \vec{v}_0 = \vec{OH} \wedge m \vec{v}_0 + \vec{HM}_\infty \wedge m \vec{v}_0 = b \vec{u}_x \wedge m \vec{v}_0 \vec{u}_y + \vec{0} = mb v_0 \vec{u}_z$ ($\vec{HM}_\infty \wedge m \vec{v}_0 = \vec{0}$ car les deux vecteurs sont collinéaires)

$\vec{L}_S = \vec{OS} \wedge m \vec{v}_s = r_{min} m v_s \vec{u}_z$ d'où: **$b v_0 = r_{min} v_s$** (1).

• Une force centrale est une force conservative donc l'énergie mécanique du météore se conserve: **$E_{m\infty} = E_{mS}$**

$E_{m\infty} = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{G M_T m}{r_\infty} = \frac{1}{2} m v_0^2$ et $E_{mS} = \frac{1}{2} m v_s^2 - \frac{G M_T m}{r_{min}}$ d'où: $\frac{1}{2} m v_s^2 - \frac{G M_T m}{r_{min}} = \frac{1}{2} m v_0^2$ d'où

$v_s^2 - v_0^2 = \frac{2 G M_T}{r_{min}}$ or $v_s = \frac{b v_0}{r_{min}}$ d'après (1) d'où $\left(\frac{b v_0}{r_{min}}\right)^2 - v_0^2 = \frac{2 G M_T}{r_{min}}$. En réduisant au même dénominateur, on

obtient un polynôme du 2nd degré: $r_{min}^2 + \frac{2 G M_T}{v_0^2} r_{min} - b^2 = 0$. $\Delta = \left(\frac{2 G M_T}{v_0^2}\right)^2 + 4 b^2$ $r_{min} > 0$ d'où:

$$r_{min} = \frac{\frac{-2 G M_T}{v_0^2} + \sqrt{\left(\frac{2 G M_T}{v_0^2}\right)^2 + 4 b^2}}{2} = \frac{-G M_T}{v_0^2} + \sqrt{\left(\frac{G M_T}{v_0^2}\right)^2 + b^2}$$