3. lancement raté

1) Sur une orbite circulaire $Em=\frac{-G\,M_T m_s}{2r_0}=\frac{1}{2}m_s V_0^2-\frac{G\,M_T m_s}{r_0}$ d'où $V_0=\sqrt{\frac{GM_T}{r_0}}$

2)L'énergie mécanique du satellite est la même que sur la trajectoire circulaire de rayon r_0 : $\boxed{Em=\frac{-G\,M_T m_s}{2r_0}}$ donc Em < 0 et donc la trajectoire est elliptique en raison des conditions initiales. Dans le cas d'un mouvement elliptique $Em=\frac{-G\,M_T m_s}{2a}$ donc par identification: $\boxed{a=r_0}$

3) On a un mouvement à force centrale, le moment cinétique se conserve au cours du mouvement:

$\vec{L}_0=\overrightarrow{OM}_0\wedge m\vec{V}_0=m\,r_0 V_0\cos\alpha\,\vec{u}_z=m\,r^2\dot{\theta}\vec{u}_z=mC\vec{u}_z$ par identification: $\boxed{C=r_0 V_0\cos\alpha}$

4) Au périgée et à l'apogée la vitesse est suivant $\vec{u}_\theta$. L'expression générale de la vitesse en coordonnées polaires est : $\vec{v}=\dot{r}\,\vec{u}_r+r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$ donc au périgée et à l'apogée $\vec{v}=r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta=\frac{C^2}{r}\vec{u}_\theta$ on en déduit

$$\boxed{Em=E_C+E_P=\frac{1}{2}m_s\frac{C^2}{r^2}-\frac{G\,M_T m_s}{r}}$$

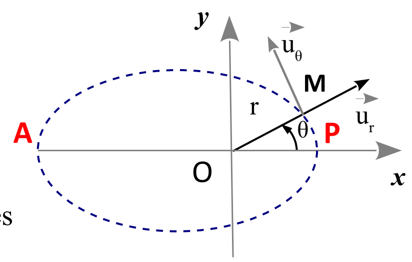
5) r_A et r_P vérifient l'équation : $\frac{-G\,M_T m_s}{2r_0}=\frac{1}{2}m_s\frac{C^2}{r^2}-\frac{G\,M_T m_s}{r}$ or $C^2=(r_0 V_0\cos\alpha)^2=r_0 G\,M_T\cos^2\alpha$ d'où $\frac{-G\,M_T m_s}{2r_0}=\frac{1}{2}m\frac{r_0 G\,M_T\cos^2\alpha}{r^2}-\frac{G\,M_T m_s}{r}$ d'où $\frac{-1}{r_0}=\frac{r_0\cos^2\alpha-2r}{r^2}$ d'où $\boxed{r^2-2\,r_0 r+r_0^2\cos^2\alpha=0}$.

$\Delta=4\,r_0^2(1-\cos^2\alpha)=4\,r_0^2\sin^2\alpha$ on en déduit : $\boxed{r_P=r_0(1-\sin\alpha)}$ et $\boxed{r_A=r_0(1+\sin\alpha)}$

6) $C=r_A V_A=r_0 V_0\cos\alpha$ d'où $V_A=\frac{r_0 V_0\cos\alpha}{r_A}$ d'où $\boxed{V_A=\frac{V_0\cos\alpha}{1+\sin\alpha}}$ de même $\boxed{V_P=\frac{V_0\cos\alpha}{1-\sin\alpha}}$

5. Mise en orbite géostationnaire

1) ci-contre.



2) en P θ = 0 et en A θ = π. On en déduit : $\boxed{r_P=\frac{p}{1+e}}$, et $\boxed{r_A=\frac{p}{1-e}}$.

Applications numériques :

$\boxed{r_P=\frac{11800}{1+0{,}72}=6860\ km}$ et $\boxed{r_A=\frac{11800}{1-0{,}72}=42142\ km}$ et les altitudes correspondantes :

$\boxed{h_P=r_P-R=6860-6400=460\ km}$ et $\boxed{h_A=r_A-R=42142-6400=35742\approx35700\ km}$

3) On calcule la vitesse à l'apogée en expriment l'énergie mécanique : $Em=\frac{-G\,M_T m_s}{(r_A+r_P)}=\frac{1}{2}m_s V_A^2-\frac{G\,M_T m_s}{r_A}$ d'où

$V_A=\sqrt{\frac{-2\,G\,M_T}{r_A+r_P}+\frac{2\,G\,M_T}{r_A}}=\sqrt{2\,G\,M_T\left(\frac{-1}{r_A+r_P}+\frac{1}{r_A}\right)}$ d'où . $\boxed{V_A=\sqrt{\frac{2\,G\,M_T r_P}{r_A(r_A+r_P)}}}$ et $\boxed{V_P=\sqrt{\frac{2\,G\,M_T r_A}{r_P(r_A+r_P)}}}$

AN : $V_A=\sqrt{\frac{2\times6{,}67.10^{-11}\times6{,}0.10^{24}\times6860}{(42142+6860)\times42142.10^3}}$ d'où $\boxed{V_A=1631\ m.s^{-1}\approx1{,}6\ km.s^{-1}}$. C'est la vitesse **minimale.**

et $V_P=\sqrt{\frac{2\times6{,}67.10^{-11}\times6{,}0.10^{24}\times42142}{(42142+6860)\times6860.10^3}}$ d'où $\boxed{V_P=10017\ m.s^{-1}\approx10\ km.s^{-1}}$. C'est la vitesse **maximale.**

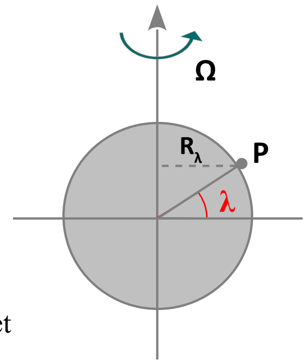
4) D'après la 3ème loi de Képler, sur l'orbite géostationnaire circulaire de rayon R_0 : $\frac{T^2}{R_0^3}=\frac{4\pi^2}{G\,M_T}$ (1) de plus la vitesse V_0

sur cette orbite est constante donc $R_0=\frac{V_0}{\omega}=\frac{V_0 T}{2\pi}$ en remplaçant dans l'expression (1) on obtient :

$V_0=\left[\frac{2\pi G M_T}{T}\right]^{\frac{1}{3}}$. AN : $V_0=\left[\frac{2\pi\times 6{,}67.10^{-11}\times 6{,}0.10^{24}}{86400}\right]^{\frac{1}{3}}$ d'où $\boxed{V_0=3051\,m.s^{-1}}$. v=d/T=(2 pi R) /T

Le supplément de vitesse est : $\boxed{\Delta V=V_0-V_A=3051-1631=1420\,m.s^{-1}\approx 1{,}4\,km.s^{-1}}$

6. Mise en orbite d'un satellite terrestre



(les résultats sont donnés en fonction $g_0 = GM_T/R^2_T$)

1) L'axe de rotation est l'axe nord-sud. L'axe de rotation est fixe dans le référentiel géocentrique. La période de révolution de la terre est T = 24 h = 86400 s.

$\Omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{86400}=7{,}27.10^{-5}\,rad.s^{-1}$.

2) A la surface de la terre le point P a un mouvement circulaire uniforme à la vitesse angulaire Ω et de rayon R_λ. Sa vitesse est $V_P=\Omega R_\lambda=\Omega R_T\cos\lambda$.

3) L'énergie cinétique du satellite est $E_C=\frac{1}{2}mV_P^2=\frac{1}{2}m\Omega^2R_T^2\cos^2\lambda$. Il subit l'attraction terrestre son énergie potentielle est: $E_p=\frac{-GM_Tm}{R_T}=-mg_0R_T$. On en déduit son énergie mécanique:

$\boxed{E_{m0}=\frac{1}{2}m\Omega^2R_T^2\cos^2\lambda-mg_0R_T}$.

4) L'énergie initiale augmente quand la lattitude diminue, le point de lancement le plus adapté est Kourou.

5) Sur une orbite basse de rayon r ≈ R_T le satellite se déplace sous l'action de l'interaction gravitationnelle, son énergie mécanique est: $\boxed{E_{mF}=\frac{-GM_Tm}{2R_T}=-mg_0\frac{R_T}{2}}$.

L'énergie à communiquer est: $\Delta E=E_{mF}-E_{m0}=-mg_0\frac{R_T}{2}-\frac{1}{2}m\Omega^2R_T^2\cos^2\lambda+mg_0R_T$ d'où :

$\boxed{\Delta E=\frac{mR_T}{2}\left[g_0-R_T\Omega^2\cos^2\lambda\right]}$. AN:

$\boxed{\Delta E=\frac{5{,}8.10^3\times 6400.10^3}{2}\left[9{,}81-6400.10^3(7{,}27.10^{-5}\times\cos(5{,}2))^2\right]=1{,}81.10^{11}\,J}$

6) $1\,kWh=10^3\times 3600=3{,}6.10^6\,J$. L'énergie dépensée pour 1kg est $\frac{\Delta E}{m}=\frac{1{,}81.10^{11}}{5{,}8.10^3}=3{,}13.10^7\,J/kg$.

3,6.10⁶ J coute 0,15 euros d'où pour 3,13.10^7 J : $coût:\frac{3{,}13.10^7\times 0{,}15}{3{,}6.10^6}=1{,}30\,euros\ par\ kg$. Le plus coûteux n'est pas l'énergie !

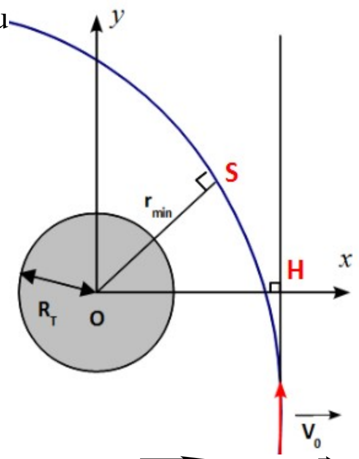
7) La différence énergétique entre la lattitude λ_K et λ_B est: $\boxed{\Delta E_B-\Delta E_K=\frac{mR_T^2\Omega^2}{2}(\cos^2\lambda_K-\cos^2\lambda_B)}$

$\boxed{\Delta E_B-\Delta E_K=\frac{5{,}8.10^3(6400.10^3\times 7{,}27.10^{-5})^2}{2}(\cos^2 5{,}2-\cos^2 46)=3{,}20.10^8\,J}$. Soit

$coût:\frac{3{,}20.10^8\times 0{,}15}{3{,}6.10^6}=13{,}3\,euros$. Le cout est insignifiant !

7. Distance de plus courte approche

Le météore est soumis à une force centrale, son moment cinétique se conserve au cours du mouvement: $\boxed{\vec{L}_\infty = \vec{L}_S}$.



$\vec{L}_\infty = \vec{OM}_\infty \wedge m\vec{v}_0 = (\vec{OH} + \vec{HM}_\infty) \wedge m\vec{v}_0 = \vec{OH} \wedge m\vec{v}_0 + \vec{HM}_\infty \wedge m\vec{v}_0 = b\vec{u}_x \wedge m v_0 \vec{u}_y + \vec{0} = mb\,v_0 \vec{u}_z$ ($\vec{HM}_\infty \wedge m\vec{v}_0 = \vec{0}$ car les deux vecteurs sont colinéaires)

$\vec{L}_S = \vec{OS} \wedge m\vec{v}_s = r_{min} m\, v_s \vec{u}_z$ d'où: $\boxed{b\,v_0 = r_{min}\,v_s}$ (1).

- Une force centrale est une force conservative donc l'énergie mécanique du météore se sonserve: $\boxed{E_{m\infty} = E_{mS}}$

$E_{m\infty} = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{G M_T m}{r_\infty} = \frac{1}{2} m v_0^2$ et $E_{ms} = \frac{1}{2} m v_s^2 - \frac{G M_T m}{r_{min}}$ d'où: $\frac{1}{2} m v_s^2 - \frac{G M_T m}{r_{min}} = \frac{1}{2} m v_0^2$ d'où $v_s^2 - v_0^2 = \frac{2 G M_T}{r_{min}}$ or $v_s = \frac{b\,v_0}{r_{min}}$ d'après (1) d'où $\left(\frac{b\,v_0}{r_{min}}\right)^2 - v_0^2 = \frac{2 G M_T}{r_{min}}$. En réduisant au même dénominateur, on obtient un polynome du 2nd degré : $r_{min}^2 + \frac{2 G M_T}{v_0^2} r_{min} - b^2 = 0$. $\Delta = \left(\frac{2 G M_T}{v_0^2}\right)^2 + 4b^2$ $r_{min} > 0$ doù:

$$\boxed{r_{min} = \frac{-\frac{2 G M_T}{v_0^2} + \sqrt{\left(\frac{2 G M_T}{v_0^2}\right)^2 + 4b^2}}{2} = -\frac{G M_T}{v_0^2} + \sqrt{\left(\frac{G M_T}{v_0^2}\right)^2 + b^2}}.$$