L'interaction gravitationnelle

1. Masse d'un astre ☺

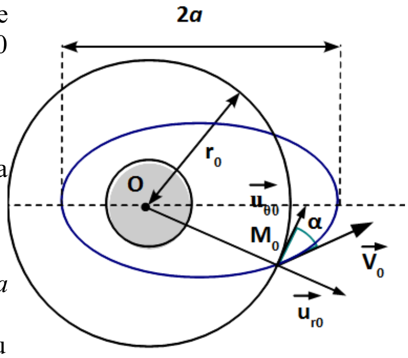
Au cours de la mission APOLLO XVII en 1972, le module de commande en orbite circulaire autour de la lune à une distance de 2040 km du centre de celle-ci, avait une période de 8240 s dans le référentiel Sélénocentrique. Calculer la masse de la Lune.

Données : $G=6{,}67.10^{-11}$ SI

2. lancement raté ☺☺

On désire effectuer le lancement d'un satellite de masse m_s de façon à avoir une orbite circulaire.
On suppose que le lancement du satellite est manqué et qu'au point d'injection sur orbite M_0 le vecteur vitesse a bien même module V_0 que pour l'orbite circulaire de rayon r_0 mais fait un angle $0 < \alpha < \pi/2$ avec la direction prévue. On notera r_0 la distance OM_0.

Le dispositif est représenté ci-contre.



1) Montrer que $V_0=\sqrt{\dfrac{GM_T}{r_0}}$ où G est la constante de gravitation universelle, et M_T la masse de la terre.
2) Exprimer l'énergie mécanique E_m du satellite en fonction de m_s ,G, M_T et r_0.
La trajectoire du satellite est nécessairement elliptique, pourquoi ? En déduire le demi grand axe a de l'ellipse.
3) Montrer grâce aux conditions initiales que la constante des aires caractérisant le mouvement du satellite est : $C=r_0v_0\cos\alpha$.
4) Montrer qu'au périgée et à l'apogée $Em=\dfrac{1}{2}m_s\dfrac{C^2}{r^2}-\dfrac{GM_Tm_s}{r}$ r étant la distance au centre O du périgée ou de l'apogée.
5) Déduire de la question précédente les distances r_P et r_A au centre O de la terre du périgée et de l'apogée de la trajectoire en fonction de r_0 et α. Rep: : $r_P=r_0(1-\sin\alpha)$, $r_A=r_0(1+\sin\alpha)$
6) Déduire de la question précédentes les vitesses V_A et V_P à l'apogée et au périgée.

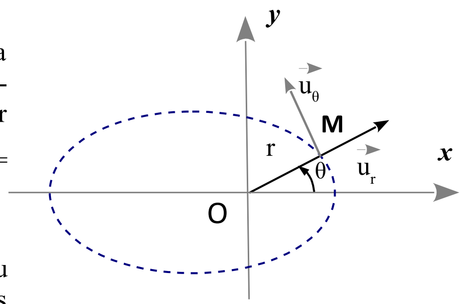
3. Trajectoire d'une comète ☺☺

On rappelle que la terre décrit autour du soleil une orbite quasi-circulaire de rayon R_0=150millions de km en T_0= 365,25 jours.

1) Exprimer la vitesse V_0 de la terre en fonction des données.
2) Une comète dont la trajectoire est coplanaire à l'orbite de la terre a une masse m_c. Son périhélie (point de sa trajectoire le plus proche du soleil) se trouve à la distance $R_0/2$du soleil et la vitesse de la comète en ce point est $2V_0$.
a) Grâce aux caractéristiques cinématiques de la comète au périhélie, montrer que son énergie mécanique est nulle, en déduire la nature de sa trajectoire .
b) Exprimer la vitesse v de la comète en fonction de sa distance r au centre du soleil. *Rep :* $v=V_0(2R_0/r)^{1/2}$

4. Mise en orbite géostationnaire ☺☺

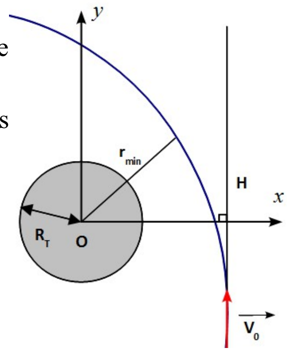
Un satellite terrestre décrit une trajectoire elliptique dans le plan équatorial. On repère sa position grâce au point M de coordonnées polaires (r, θ). La trajectoire est représentée ci-contre. Le point O est le centre de la terre. En utilisant les coordonnées polaires définies sur le schéma, la trajectoire a pour équation : $\boldsymbol{r=\dfrac{p}{1+e\cos\theta}}$ avec e = 0,72 l'excentricité et p = 11800 km le paramètre de l'ellipse.



1) Positionner l'apogée et le périgée sur le schéma.
2) En utilisant l'équation de la trajectoire, exprimer les rayons r_A et r_P de l'apogée et du périgée du satellite en fonction de p et e. Faire les applications numériques et calculer les altitudes correspondantes.
3) Montrer que la vitesse à l'apogée V_A peut se mettre sous la forme : $V_A=\sqrt{\dfrac{2GM_Tr_P}{r_A(r_A+r_P)}}$. En déduire l'expression V_P de la vitesse au périgée en fonction des mêmes paramètres. Faire l'AN. Quelle caractéristique principale a chacune de ces deux vitesses ?
4) Quelle variation de vitesse faut-il communiquer à l'apogée pour rendre le satellite géostationnaire ?
Données: la masse de la Terre : $M_T = 6{,}0.10^{24}$ kg , la constante de gravitation $G = 6{,}67.10^{-11}$ SI , le rayon de la Terre R = 6400 km.

5. Distance de plus courte approche ☺☺☺

Un météore, point matériel M de masse m négligeable devant la masse M_T de la Terre, de centre O , arrive de l'infini avec la vitesse v_0 par rapport à la Terre. M décrit une branche d'hyperbole de foyer O . Son paramètre d'impact est OH = b (voir la figure) . Calculer sa distance r_{min} de plus courte approche de la Terre, en fonction de v_0 , b , M_T , G constante de gravitation et R_T rayon de la Terre.
Rep : $r_{min}=-GM_T/v_0^2 + [\ (GM_T/v_0^2)^2 + b^2\ ]^{1/2}$



6. Énergie de mise sur orbite d'un satellite terrestre ☺☺

Un satellite terrestre de masse m est lancé d'une base M_0 située à la latitude λ . Quelle énergie ΔE faut-il lui fournir pour le placer sur une orbite circulaire de rayon r ? On exprimera ΔE en fonction de m , λ, g_0 intensité du champ de pesanteur au sol, R_T rayon terrestre et ω_T vitesse de rotation de la Terre dans le référentiel géocentrique . Commentez l'expression obtenue. *Rep :* $\Delta E = E_2 - E_1 = m\ [\ g_0 R_T (\ 1 - R_T/2r\ ) - (\ \omega_T^{\ 2} R_T^{\ 2} \cos^2 \lambda)/2]$