Concours Blanc
PSI
MATHEMATIQUES
Vendredi 3 Mars 2023
(Durée : 4 heures)

L'usage de calculatrice est interdit.

Sujet Mines/Centrale

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons de ses initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- **Indiquer le sujet choisi**
- **Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d' autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.**
- **Ne pas utiliser de correcteur.**
- **Indiquer au début de la copie le nombre de copies doubles utilisées.**
- **Numéroter les feuilles.**
- **Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.**

Problème 1 : Matrices de Toeplitz et Matrices cycliques

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Si $(t_{-n+1}, \dots, t_0, \dots, t_{n-1}) \in \mathbb{K}^{2n-1}$, on note $T(t_{-n+1}, \dots, t_0, \dots, t_{n-2}, t_{n-1})$ la matrice

$$T(t_{-n+1}, \dots, t_0, \dots, t_{n-2}, t_{n-1}) = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \cdots & \cdots & t_{n-1} \\ t_{-1} & t_0 & t_1 & \ddots & & \vdots \\ t_{-2} & t_{-1} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t_1 & t_2 \\ \vdots & & \ddots & t_{-1} & t_0 & t_1 \\ t_{-n+1} & \cdots & \cdots & t_{-2} & t_{-1} & t_0 \end{pmatrix}$$

Une telle matrice est appelée *matrice de Toeplitz* d'ordre n. On nomme $\mathrm{Toep}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de Toeplitz d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$:

$$\mathrm{Toep}_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid \exists (t_{-n+1}, \dots, t_0, \dots, t_{n-1}) \in \mathbb{K}^{2n-1},\ M = T(t_{-n+1}, \dots, t_0, \dots, t_{n-2}, t_{n-1})\}$$

1. Généralités :
   (a) Montrer que $\mathrm{Toep}_n(\mathbb{C})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. En donner une base et en préciser la dimension.
   (b) Montrer que si deux matrices A et B commutent ($AB = BA$) et si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$, alors $P(A)$ et $Q(B)$ commutent.
2. Endomorphismes et matrices cycliques :
   Pour toute matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on note f_M l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à M.
   (a) Montrer que si M est dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, alors les propositions suivantes sont équivalentes :
   - il existe x_0 dans $\mathbb{C}^n$ tel que $(x_0, f_M(x_0), \dots, f_M^{n-1}(x_0))$ est une base de $\mathbb{C}^n$;

— M est semblable à la matrice $C(a_0, \ldots, a_{n-1})$ définie par

$$C(a_0, \ldots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

où $(a_0, \ldots, a_{n-1})$ sont des nombres complexes.

On dit alors que f_M est un endomorphisme cyclique, que M est une matrice cyclique et que x_0 est un vecteur cyclique de f_M.

(b) Soit M dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que f_M est diagonalisable. On note $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ ses valeurs propres (non nécessairement distinctes) et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de vecteurs associée à ces valeurs propres. Soit $u = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i$ un vecteur de $\mathbb{C}^n$ où $(u_1, \ldots, u_n)$ sont n nombres complexes.

i. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur $(u_1, \ldots, u_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ pour que $\left(u, f_M(u), \ldots, f_M^{n-1}(u)\right)$ soit une base de $\mathbb{C}^n$.

ii. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme diagonalisable soit cyclique. Caractériser alors ses vecteurs cycliques.

(c) Soit $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$. On s'intéresse aux éléments propres de la matrice $C(a_0, \ldots, a_{n-1})$.

i. Soit λ un nombre complexe. En discutant dans $\mathbb{C}^n$ du système $C(a_0, \ldots, a_{n-1})X = \lambda X$, montrer que λ est une valeur propre de $C(a_0, \ldots, a_{n-1})$ si et seulement si λ est racine d'un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ à préciser.

ii. Si λ est racine de ce polynôme, déterminer le sous-espace propre de $C(a_0, \ldots, a_{n-1})$ associé à la valeur propre λ et préciser sa dimension.

iii. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice cyclique soit diagonalisable.

3. Commutant d'un endomorphisme cyclique :
Soient M une matrice cyclique et x_0 un vecteur cyclique de f_M. On cherche à montrer que l'ensemble

$$\mathscr{C}(f_M) = \{g \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^n) \mid f_M \circ g = g \circ f_M\}$$

est l'ensemble des polynômes en f_M.

(a) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que $P(f_M) \in \mathscr{C}(f_M)$.

(b) Soit $g \in \mathscr{C}(f_M)$. Montrer qu'il existe $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ tels que $g = \alpha_0 Id_{\mathbb{C}^n} + \alpha_1 f_M + \cdots + \alpha_{n-1} f_M^{n-1}$.
Indication : On pourra utiliser la base $\left(x_0, f_M(x_0), \ldots, f_M^{n-1}(x_0)\right)$ *et exprimer* $g(x_0)$ *dans cette base.*

(c) Conclure.

4. Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(a) Donner les valeurs propres de N et les sous-espaces propres associés. Est-elle diagonalisable ?

(b) La matrice N est-elle cyclique ?

(c) Montrer que l'ensemble des matrices qui commutent avec N est l'ensemble des matrices de Toeplitz triangulaires inférieures.

Problème 2 : Variables aléatoires entières symétriques à forte dispersion

Dans tout le sujet, on fixe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ sur lequel toutes les variables aléatoires considérées sont définies. On utilisera systématiquement la locution « variable aléatoire » pour parler d'une variable aléatoire réelle discrète, et « variable aléatoire entière » pour parler d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$. On pourra noter :

$$X(\Omega) = \{x_n, n \in I\}$$

où I est un sous-ensemble fini ou dénombrable de $\mathbb{N}$ et $x_n \in \mathbb{R}$ pour tout $n \in I$.

Définition 1 (Dispersion d'ordre α)**.** *On fixe un réel $\alpha > 0$. Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire. On dit que X vérifie la condition $(\mathcal{D}_\alpha)$ – dite de dispersion d'ordre α – lorsque, quand n tend vers $+\infty$,*

$$\mathbf{P}(|X| \geqslant n) = \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{1}$$

Définition 2 (Variables aléatoires symétriques)**.** *On dit que X est symétrique lorsque $-X$ suit la même loi que X, autrement dit lorsque :*

$$\forall x \in X(\Omega), \quad \mathbf{P}(X = x) = \mathbf{P}(X = -x). \tag{2}$$

On admet le *principe de transfert de l'égalité en loi* :

Théorème 1. *Étant donné deux variables aléatoires X et Y prenant leurs valeurs dans un même ensemble E, ainsi qu'une application $u : E \to F$, si X et Y suivent la même loi alors $u(X)$ et $u(Y)$ aussi.*

Dans tout le sujet, on se donne une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires entières, mutuellement indépendantes, toutes de même loi, symétriques, et vérifiant la condition $(\mathcal{D}_\alpha)$. On *admet* que sous ces conditions la variable X_{n+1} est indépendante de $X_1 + \cdots + X_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$M_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$$

appelée $n^{\text{ième}}$ moyenne empirique des variables X_k. L'objectif du sujet est d'établir la convergence simple d'une suite de fonctions associées aux variables M_n.

Les trois premières parties du sujet sont totalement indépendantes les unes des autres.

Questions de cours

1. Soit X une variable aléatoire. Rappeler la définition de « X est d'espérance finie ». Montrer alors que X est d'espérance finie si et seulement si $|X|$ est d'espérance finie.
2. Soit X une variable aléatoire. Montrer que si X est bornée, autrement dit s'il existe un réel $M \geqslant 0$ tel que $\mathbf{P}(|X| \leqslant M) = 1$, alors X est d'espérance finie.

Généralités sur les variables aléatoires

3. Soit X une variable aléatoire entière vérifiant $(\mathcal{D}_\alpha)$. Montrer que X n'est pas d'espérance finie, et que X^2 non plus.
4. Soient X une variable aléatoire symétrique, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction impaire. Montrer que $f(X)$ est symétrique, et que si $f(X)$ est d'espérance finie alors $\mathbf{E}(f(X)) = 0$.
5. Soient X et Y deux variables aléatoires symétriques indépendantes. En comparant la loi de $(-X, -Y)$ à celle de (X, Y), démontrer que $X + Y$ est symétrique.

Deux sommes de séries

On fixe ici un nombre complexe z tel que $z \neq 1$ et $|z| \leqslant 1$. On introduit la fonction :

$$L : t \mapsto \int_0^t \frac{z}{1 - uz}\mathrm{d}u.$$

6. Montrer que, sur le segment $[0,1]$, la fonction L est convenablement définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$. Donner une expression simple de sa dérivée $n^{\text{ième}}$ pour tout $n \geqslant 1$.
7. Justifier que pour tout $t \in]0,1]$, on a $1-t \leqslant |1-tz|$, et plus précisément encore que $1-t < |1-tz|$.
8. En déduire successivement que :
$$\int_0^1 \left|\frac{1-t}{1-tz}\right|^n \mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{z^{n+1}(1-t)^n}{(1-tz)^{n+1}}\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
9. En déduire, grâce à une formule de Taylor, que $L(1) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$.
10. Montrer que la fonction :
$$\gamma : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (t,u) & \longmapsto & \left|1+ue^{it}\right| \end{array} \right.$$
est continue. En déduire qu'il existe, pour tout $a \in]0,\pi[$, un réel $m_a > 0$ tel que :
$$\forall (t,u) \in [-a,a]\times[0,1], \quad \left|1+ue^{it}\right| \geqslant m_a.$$
11. Montrer que la fonction :
$$F : t \in]-\pi,\pi[\mapsto \int_0^1 \frac{e^{it}}{1+ue^{it}}\mathrm{d}u$$
est de classe $\mathcal{C}^1$ et donner une expression de sa dérivée sous la forme d'une intégrale à paramètre.
12. Montrer que :
$$\forall t \in]-\pi,\pi[, \quad F'(t) = -\frac{\tan(t/2)}{2} + \frac{i}{2}$$
et en déduire la valeur de $F(t)$ pour tout $t \in]-\pi,\pi[$.
13. Soit $\theta \in]0,2\pi[$. Déduire des questions précédentes que :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} = -\ln\left(2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n} = \frac{\pi-\theta}{2}.$$

Fonction caractéristique d'une variable aléatoire symétrique

On fixe dans cette partie une variable aléatoire symétrique X. On pose :
$$\Phi_X : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \mathbf{E}\left(\cos(tX)\right), \end{array} \right.$$
appelée fonction caractéristique de X.

14. Montrer que Φ_X est bien définie, paire et que : $\forall t \in \mathbb{R}$, $|\Phi_X(t)| \leqslant 1$.
15. En utilisant le théorème du transfert, montrer que Φ_X est continue.

Dans la suite de cette partie, on suppose que X est une variable aléatoire entière symétrique vérifiant la condition $(\mathcal{D}_\alpha)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :
$$R_n := \mathbf{P}(|X| \geqslant n).$$

16. On fixe un réel $t \in]0,2\pi[$. Montrer successivement que :
$$\Phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (R_n - R_{n+1})\cos(nt)$$
puis :
$$\Phi_X(t) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} R_n\left[\cos(nt) - \cos((n-1)t)\right].$$
On pourra établir au préalable la convergence de la série $\sum_n R_n \cos(nt)$.

17. Montrer qu'il existe un nombre réel C tel que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(R_n - \frac{\alpha}{n}\right) e^{int} \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} C,$$

et en déduire que, quand t tend vers 0^+,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} R_n \cos(nt) = O(\ln(t)) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} R_n \sin(nt) = \frac{\pi\alpha}{2} + o(1).$$

18. Conclure que, quand t tend vers 0^+,

$$\Phi_X(t) = 1 - \frac{\pi\alpha}{2} t + o(t).$$

La fonction Φ_X est-elle dérivable en 0 ?

Convergence simple de la suite des fonctions caractéristiques des variables M_n

19. Soient X et Y deux variables aléatoires symétriques indépendantes. Montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Phi_{X+Y}(t) = \Phi_X(t)\Phi_Y(t).$$

20. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, la variable M_n est symétrique, et :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Phi_{M_n}(t) = \left(\Phi_{X_1}(t/n)\right)^n.$$

21. En déduire que pour tout réel t,

$$\Phi_{M_n}(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \exp\left(-\frac{\pi\alpha|t|}{2}\right).$$

22. La convergence établie à la question précédente est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

À partir de là, des théorèmes d'analyse de Fourier permettraient de démontrer que la suite $(M_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable de Cauchy de paramètre $\frac{\pi\alpha}{2}$, ce qui signifie que pour tout segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$,

$$\mathbf{P}(a \leqslant M_n \leqslant b) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\alpha}{2} \int_a^b \frac{\mathrm{d}u}{u^2 + (\pi\alpha/2)^2}.$$

Fin du problème