TSI 2018 pb II, CCINP, Correction

Problème 2

Partie I — Résolution dans le cas $\mu = 0$

Q25. $f : x \mapsto \arcsin(2x-1)$ est définie au point x, ssi $-1 \leq 2x-1 \leq 1$, et l'on obtient : $0 \leq x \leq 1$. Posons $\varphi : x \mapsto 2x-1$, la fonction φ est continue sur $I = [0, 1]$, on a $\varphi(I) = [-1, 1]$, et enfin $\arcsin$ est continue sur $J = \varphi(I)$. Alors par composition, $f = \arcsin \circ \varphi$ est continue sur $I = [0, 1]$.

De même, φ est dérivable sur $\tilde{I} =]0, 1[$, on a $\varphi(\tilde{I}) =]-1, 1[$, et enfin $\arcsin$ est dérivable sur $\tilde{J} = \varphi(\tilde{I})$. Alors par composition, $f = \arcsin \circ \varphi$ est dérivable sur $\tilde{I} =]0, 1[$, et se dérive avec la formule :

$$\begin{aligned} \forall x \in]0, 1[, \quad f'(x) &= \arcsin'\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{4x-4x^2}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \end{aligned}$$

Q26. Si une fonction y est constante sur $]0, 1[$, alors on a $y'(x) = y''(x)$ pour tout $x \in]0, 1[$, et donc l'égalité $16(x^2-x)y'' + (16x-8)y' = 0$ est vérifiée. La fonction y est une solution de (E_0) sur $]0, 1[$.

Q27. Réduisons au même dénominateur :

$$\frac{1/2}{x} + \frac{1/2}{x-1} = \frac{x-1/2}{x(x-1)} = \frac{16x-8}{16x(x-1)} = \frac{16x-8}{16(x^2-x)}$$

Q28. L'équation (E_0) peut, sur l'intervalle $]0, 1[$, s'écrire sous forme résolue :

$$y'' + \frac{16x-8}{16(x^2-x)} y' = 0\,.$$

L'équation (E_0) est donc également équivalente à :

$$z' + \frac{16x-8}{16(x^2-x)} z = 0 \quad \text{et} \quad z = y'$$

En utilisant la question précédente, on obtient la forme attendue :

$$(E^\star) \;:\; z' + \Big(\frac{1/2}{x} + \frac{1/2}{x-1}\Big) z = 0 \quad \text{et} \quad z = y'$$

Q29. L'équation $(E^\star)$ est linéaire scalaire homogène du premier ordre. Posons $a(x) = \dfrac{1/2}{x} + \dfrac{1/2}{x-1}$, une primitive sur $]0, 1[$ est $A(x) = \dfrac{1}{2}\ln x + \dfrac{1}{2}\ln|x-1| = \dfrac{1}{2}\ln x + \dfrac{1}{2}\ln(1-x)$. Alors les solutions de $(E^\star)$ sur $]0, 1[$ sont les fonctions : $\varphi_A : x \mapsto C\mathrm{e}^{-A(x)} = A\,x^{-1/2}(1-x)^{-1/2} = \dfrac{A}{\sqrt{x(1-x)}}$ pour un $A \in \mathbb{R}$.

Q30. D'après la question (Q28), les solutions de (E_0) sur $]0, 1[$ sont les fonction y vérifiant :

$$z = y' \text{ est solutions de } (E^\star) \text{ sur }]0, 1[$$

Ce sont les fonction y telles que :

$$\text{il existe } A \in \mathbb{R}, \quad y'(x) = \frac{A}{\sqrt{x(1-x)}} = A\,f'(x)$$

On conclut facilement : les solutions de (E_0) sur $]0, 1[$ sont les fonctions :

$$f_{A,B} : x \mapsto A\,f(x) + B = A\arcsin(2x-1) + B \quad \text{où } A, B \in \mathbb{R}$$

Partie II — Recherche d'une solution particulière dans le cas $\mu=0$

Q31. Rappelons le cours sur les séries entières :

(C) *La somme $y(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ d'une série entière est dérivable sur son intervalle ouvert de convergence, ici $]-R,R[$. De plus, la fonction dérivée s'obtient en dérivant terme à terme : $y'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} n\,a_n x^{n-1}$, et cette série entière a également R pour rayon de convergence.*

Montrons par récurrence que y est de classe C^∞, c'est-à-dire indéfiniment dérivable, sur $]-R,R[$: nous montrons, de façon précise : $\left[\forall k\in\mathbb{N},\ \mathscr{P}(k)\right]$

où $\mathscr{P}(k)$ est la propriété : « la dérivée k-ième $y^{(k)}(x)$ existe sur $]-R,R[$ et est somme d'une série entière $y^{(k)}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$, et dont le rayon de convergence est R ».

— Notre rappel de cours initialise cette récurrence.

— Soit $k\in\mathbb{N}^\star$. Supposons : « $y^{(k)}(x)$ existe sur $]-R,R[$ et soit somme d'une série entière $y^{(k)}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$, le rayon de convergence de cette série étant exactement R ».

Appliquons le théorème (C) : la fonction $y^{(k)}$ étant la somme d'une série entière elle est dérivable sur son intervalle ouvert de convergence $]-R,R[$, sa dérivée s'obtient en dérivant terme à terme, et est donc somme de la série entière dérivée qui est aussi de rayon R.

Cette fonction dérivée est $y^{(k+1)}$: nous avons montré la propriété au rang $k+1$.

Q32. Soit une fonction $y(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, somme d'une série entière de rayon R. En appliquant (Q31) :

$$y'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} n\,a_n x^{n-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n,\qquad x\,y'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} n\,a_n x^n=\sum_{n=0}^{+\infty} n\,a_n x^n,\qquad y''(x)=\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$$

$$x\,y''(x)=\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)n\,a_{n+1}x^n,\qquad x^2y''(x)=\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n=\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n$$

À l'aide ces expressions, nous allons pouvoir exprimer le premier membre de l'équation (E_μ) comme la somme d'une série entière :

$$\begin{aligned}
16(x^2-x)\,y''+(16x-8)\,y'-\mu y &= 16x^2y''-16x\,y''+16x\,y'-8y'-\mu y\\
&= 16\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n-16\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)n\,a_{n+1}x^n+16\sum_{n=0}^{+\infty} n\,a_n x^n-8\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n-\mu\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left[16n(n-1)a_n x^n-16(n+1)n\,a_{n+1}+16n\,a_n-8(n+1)a_{n+1}-\mu\,a_n\right]x^n\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left[(16n^2-\mu)\,a_n-8(n+1)(2n+1)a_{n+1}\right]x^n
\end{aligned}$$

La fonction y est donc solution de (E_μ), ssi $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left[(16n^2-\mu)\,a_n-8(n+1)(2n+1)a_{n+1}\right]x^n=0.$

Q33. Par unicité des coefficients d'une série entière, si y est solution de (E_μ), on a :

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad (16n^2-\mu)\,a_n-8(n+1)(2n+1)a_{n+1}=0$$

Alors :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_{n+1}=\frac{(16n^2-\mu)}{8(n+1)(2n+1)}\,a_n=\frac{(16n^2-\mu)}{4(2n+2)(2n+1)}\,a_n\qquad (\star)$$

On en déduit :

$$a_{n+1} = a_0 \prod_{k=0}^{n} \frac{(16k^2-\mu)}{4(2k+2)(2k+1)} = a_0 \frac{\prod_{k=0}^{n}(16k^2-\mu)}{\prod_{k=0}^{n} 4(2k+2)(2k+1)} = a_0 \frac{\prod_{k=0}^{n}(16k^2-\mu)}{4^{n+1}(2n+2)!}$$

Ou encore, par simple décalage d'indice :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^\star, \quad a_n = a_0 \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(16k^2-\mu)}{4^n(2n)!} \qquad (**)$$

Q34. Si $a_0=0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n=0$. La fonction y est la fonction nulle, somme de la série entière nulle de rayon de convergence $+\infty$.

Q35. Si $a_0 \neq 0$ et $\mu = 16p^2$ pour un entier p, on a $a_n = a_0 \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(16k^2-\mu)}{4^n(2n)!}$ pour tout $n \in [\![1, p-1]\!]$.

Au rang $n=p$, la formule (*) donne $a_p=0$ d'abord, et ensuite : $\forall n \geq p, \quad a_n=0$. Dans ce cas, toute solution développable en série entière est un polynôme de degré $p-1$, et ces solutions forment une droite.

Q36. Si $a_0 \neq 0$ et μ n'est pas de la forme $\mu = 16p^2$, alors $a_n = a_0 \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(16k^2-\mu)}{4^n(2n)!}$ pour tout n.

Cherchons le rayon de convergence de cette série entière, et pour cela posons $u_n = a_n x^n$.

D'après (*) on a $\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = |x|$, et donc en utilisant le théorème de D'Alembert :

- Si $|x|<1$, la série numérique $\sum a_n x^n$ converge absolument,
- Si $|x|>1$, la série numérique $\sum a_n x^n$ diverge grossièrement.

On en déduit : $R=1$.

Partie III — Étude d'une solution particulière

Dans cette partie, on a $a_0=1$, $\mu=1$, et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{(16n^2-1)}{4(2n+2)(2n+1)} a_n \quad (*) \qquad ; \qquad \forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad a_n = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(16k^2-1)}{4^n(2n)!} \quad (**)$$

Q37. En reprenant (**), on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \qquad a_n = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(16k^2-1)}{4^n(2n)!} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(4k-1)(4k+1)}{4^n(2n)!} \qquad (***)$$

Q38. Notons P_n le produit des entiers pairs, I_n le produit des entiers impairs, compris entre 1 et $4n$, de façon que $(4n)! = P_n I_n$. Pour le produit des pairs, on a $P_n = 2 \ldots (4n) = 2^{2n}\, 1 \ldots (2n) = 2^{2n}(2n)!$.

Considérons ensuite le produit :

$$Q_n = (4n-1) \times \prod_{k=0}^{n-1}(4k-1)(4k+1) = -1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot (4n-5) \cdot (4n-3) \times (4n-1) = -I_n$$

On a donc :

$$(4n)! = P_n I_n = 2^{2n}(2n)! \cdot (-Q_n) = -2^{2n}(2n)!(4n-1) \times \prod_{k=0}^{n-1}(4k-1)(4k+1)$$

Q39. Poursuivons le calcul de la question précédente : $(4n)! = -2^{2n}(2n)!(4n-1) \times \prod_{k=0}^{n-1}(4k-1)(4k+1)$

donne $\prod_{k=0}^{n-1}(4k-1)(4k+1) = \dfrac{-(4n)!}{2^{2n}(2n)!(4n-1)}$. En remplaçant dans l'expression (***) de a_n :

$$a_n = \frac{-(4n)!}{2^{2n}(2n)!(4n-1)}\,\frac{1}{4^n(2n)!} = \frac{-(4n)!}{4^{2n}(2n)!^2(4n-1)}$$

Q40. À l'aide de la formule de Stirling : $(4n)! \sim \mathrm{e}^{-4n}(4n)^{4n}\sqrt{2\pi\,4n} = \mathrm{e}^{-4n}4^{4n}n^{4n}\,2\sqrt{2\pi n}$, puis $(2n)! \sim \mathrm{e}^{-2n}(2n)^{2n}\sqrt{2\pi\,2n}$, $(2n)!^2 \sim \mathrm{e}^{-4n}(2n)^{4n}\,2\pi\,2n = \mathrm{e}^{-4n}4^{2n}n^{4n}\,2\pi\,2n$ (on a bien $2^{4n} = 4^{2n}$).

Alors :

$$a_n = \frac{-(4n)!}{4^{2n}(2n)!^2(4n-1)} \sim \frac{-\mathrm{e}^{-4n}4^{4n}n^{4n}\,2\sqrt{2\pi n}}{4^{2n}\mathrm{e}^{-4n}4^{2n}n^{4n}\,2\pi\,2n\;4n} = \frac{-\sqrt{n}}{4\sqrt{2\pi}\,n^2} = \frac{-1}{4\sqrt{2\pi}\,n^{3/2}}$$

Q41. Nous avions trouvé pour rayon de convergence $R=1$ (question Q36).

Étudions la convergence des séries numériques $\sum a_n 1^n = \sum a_n$et $\sum a_n(-1)^n$: la série $\sum a_n$ converge, puisque la série de Riemann) $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge. Nos deux séries numériques convergent absolument.

Q42. La fonction φ, somme de la série entière $\sum a_n x^n$ étudié ci-dessus, est donc une fonction dérivable sur $]-1,1[$. La série entière $\sum a_n x^n$ vérifie la condition de la question (Q32) pour $\mu = 1$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left[(16n^2-\mu)\,a_n - 8(n+1)(2n+1)a_{n+1}\right]x^n = 0.$$

Alors, d'après le résultat de cette question, la fonction somme φ est solution de (E_1) sur l'intervalle $]-1,1[$. Pour conclure, il reste à justifier la solution φ n'est pas la fonction nulle. Or, $\varphi(0) = a_0 = 1$ est non nul.