Calcul différentiel

Exercice 1 : On pose : $f(x,y) = \dfrac{x^3}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0)=0$. Montrer que f est continue en $(0,0)$, qu'elle admet des dérivées partielles d'ordre 1 en $(0,0)$, mais qu'elle n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 2 : Déterminer toutes les fonctions F de classe $\mathbb{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telles que :
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = x+y$ et $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = x-y$.

Exercice 3 : Soit f définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par : $f(x,y) = xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

1. Montrer que f peut être prolongée sur $\mathbb{R}^2$ en une application g continue.
2. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
3. Calculer $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(0,0)$. Qu'en déduit-on ?

Exercice 4 : On pose : $f(x,y) = g(x^2+y^2)$. Déterminer toutes les applications g de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que : $\forall (x,y) \neq (0,0), \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

Exercice 5 : Rechercher les extrema locaux de la fonction f définie par :
1)$f(x,y) = x^2 + x^2y + y^3$, sur $\mathbb{R}^2$ 2) $f(x,y) = -x^2 - xy - y^2 + 3y - 2$ sur $\mathbb{R}^2$
3) $f(x,y) = (x-y)^2 + x^3 + y^3$ sur $\mathbb{R}^2$

Exercice 6 : Soit $f(x,y) = x^2+y^2-xy+x+y$ et $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x+y \geqslant -3, x \leqslant 0, y \leqslant 0\}$.
Justifier que f admet des extremums absolus sur A, puis déterminer ces valeurs.

Exercice 7 : Soit $f(x,y) = xy(1-x-y)$ et $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geqslant 0, y \geqslant 0, 1-x-y \geqslant 0\}$.
Montrer que f admet un maximum sur A, qui n'est pas atteint sur la frontière de A.

Exercice 8 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 3$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 5$.
On pose : $g(t) = f(2t+t^2+e^t, \sin t + \cos t)$. Calculer $g'(0)$.

Exercice 9 : Equation du transport
On considère l'équation du transport à vitesse constante (E) : $\dfrac{\partial u}{\partial t} + c\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$, de fonction inconnue u, dépendant de (x,t), de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, où c est une constante non nulle (célérité de l'onde, en ms^{-1}).
Résoudre (E) à l'aide du changement de variable : $y = x, z = x - ct$.

Exercice 10 : Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + a\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x+y$.

Exercice 11 : En passant en coordonnées polaires, résoudre sur $U = \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$ l'équation aux dérivées partielles : $\forall (x,y) \in U, x\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) - y\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2f(x,y) + \arctan \dfrac{y}{x}$.

Exercice 12 : Equation d'onde à une dimension
On considère l'équation d'onde (E) : $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, de fonction inconnue u, dépendant de (x,t), de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, où $c > 0$ est une constante (célérité de l'onde, en ms^{-1}).

1. Transformer (E) par le changement de variable affine : $y = x + at, z = x + bt$ avec $a \neq b$.
2. En choisissant bien les constantes a et b, déterminer les solutions de (E).
3. On donne de plus les conditions initiales (CI) : $\forall x, \begin{cases} u(x,0) &= f(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= g(x) \end{cases}$, où f est une fonction donnée de classe $\mathcal{C}^2$ et g une fonction donnée de classe $\mathcal{C}^1$.
   Montrer qu'il existe une unique solution de (E) vérifiant ces conditions initiales et exprimer cette solution en fonction de f et g.

Exercice 13 : Soit $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x < y\}$ et $\varphi : (x,y) \mapsto (u,v) = (x+y, xy)$. Montrer que l'application φ est bijective de U sur $V = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 / u^2 - 4v > 0\}$.
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}$. Justifier l'existence d'une fonction g de classe $\mathcal{C}^1$ de V dans $\mathbb{R}$ telle que : $f = g \circ \varphi$.
Calculer les dérivées partielles de f en fonction de celles de g.
En déduire les solutions sur U de l'équation aux dérivées partielles :
$\forall (x,y) \in U, x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) - y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 - y^2$.

Exercice 14 : On considère la courbe plane (C) d'équation : $y^3 - y + 2x^3 - x = 0$. Montrer que tout point $M_0(x_0, y_0)$ de (C) est un point régulier et écrire l'équation de la tangente en ce point.

Exercice 15 : Soit (Σ) la surface d'équation : $z(x^2 + y^2) - 2xy = 0$. Vérifier que le point $A\left(1, \sqrt{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ appartient à (Σ) et écrire une équation du plan (P) tangent en A à (Σ).

Exercice 16 : Déterminer les points de la surface S d'équation : $x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$ en lesquels le plan tangent est perpendiculaire à la droite d'équations : $x = \dfrac{y}{3} = -\dfrac{z}{2}$.