Calcul Différentiel - compléments

Propriété 1 : Condition nécessaire d'extremum

On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U.
Si f admet un extremum local en $a \in U$, alors : $\overrightarrow{\nabla} f(a) = \vec{0}$.

Démonstration. Les applications partielles admettent chacune un extrêmum. Or la dérivée en a_i d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui y admet un extrêmum y est nulle.

□

Méthode de recherche d'un extrêmum
Pour rechercher les extremums locaux d'une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U, on commence par calculer ses points critiques, ce qui revient à résoudre un système d'équations.
Puis on fait une étude locale au voisinage de chacun d'eux en étudiant le signe de la différence $f(b) - f(a)$ lorsque b est situé au voisinage de a.
f présente un extremum local en a si et seulement si ce signe est localement constant.

On peut aussi être amené à rechercher les extremums sur une partie non ouverte. Dans ce cas, on procède en 2 temps : étude à l'intérieur et étude sur la frontière de cette partie.

Dans le cas où il s'agit d'une partie fermée bornée K, on peut dès le départ, par continuité de f, affirmer l'existence d'un maximum global et d'un minimum global sur K. Si l'on a fait l'étude sur la frontière et la recherche des points critiques à l'intérieur, on peut alors conclure pour les maximums globaux sans faire d'étude locale, en comparant les résultats des 2 études.
Cas $n = 3$:

Propriété 2 : Plan tangent à une surface

La surface d'équation $f(x, y, z) = \lambda$ admet en tout point régulier un plan tangent orthogonal au gradient.

Le gradient est orthogonal aux surfaces de niveau et dirigé dans le sens des valeurs croissantes de f.

Exemples en physique

- Champ électrostatique
  $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\nabla} V$, où $\overrightarrow{E}$ est le champ électrostatique et V le potentiel électrostatique.
  Une équipotentielle est une ligne de niveau du potentiel : $V(x, y, z) = \lambda$.
  Les lignes de champ sont orthogonales aux équipotentielles et dirigées suivant les potentiels décroissants.
- Diffusion thermique : Loi de Fourier
  $\overrightarrow{J} = -\lambda \overrightarrow{\nabla} T$, où $\overrightarrow{J}$ est le vecteur densité de courant thermique, λ la conductivité thermique et T la température.
  Les lignes de flux sont perpendiculaires aux isothermes et les transferts thermiques s'effectuent des zones chaudes vers les zones froides (températures décroissantes).
- Diffusion de particules : Loi de Fick
  $\overrightarrow{J} = -D \overrightarrow{\nabla} n$, où $\overrightarrow{J}$ est le vecteur densité de courant de particules, D le coefficient de diffusion et n la densité de particules.
  Le courant de particules va dans le sens des concentrations décroissantes (des zones riches vers les zones pauvres).

Propriété 3 : Courbe tracée sur une surface

Soit (S) une surface d'équation $f(x, y, z) = 0$. Une courbe paramétrée (C) tracée sur (S) est définie par une application $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ telle que : $\forall t \in I, f(\gamma(t)) = 0$.
En un point $M(t) = f(\gamma(t))$ régulier, la courbe (C) admet une tangente orthogonale à $\vec{\nabla} f(\gamma(t))$, i.e. contenue dans le plan tangent.

Exemple : La courbe paramétrée d'équations $x(t) = \cos t, y(t) = \sin t, z(t) = t$ est une hélice tracée sur le cylindre d'équation $x^2 + y^2 = 1$.