Révisions sur l'intégration

Inégalité des modules : si $a \leq b$, alors : $\left|\int_a^b f(t)\ dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\ dt \leq ||f||_\infty (b-a)$, où l'on note : $||f||_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|$ (norme infini de f).

Valeur moyenne : la valeur moyenne de f sur $[a,b]$ $(a < b)$ est le scalaire $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\ dt$.
Exemple : la valeur moyenne des fonctions sinus et cosinus sur une période est nulle.
Si f est réelle telle que : $\forall t \in [a,b], m \leq f(t) \leq M$, alors : $m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\ dt \leq M$.

Inégalité de Cauchy-Schwarz pour des fonctions réelles :
$\left(\int_a^b f(t)g(t)\ dt\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(t)\ dt\right) \times \left(\int_a^b g^2(t)\ dt\right)$.

Convergence des sommes de Riemann : $\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)\ dt$.
En particulier, si f est continue sur $[0,1]$: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\ dt$.

Soit f continue sur I. La fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\ dt$ est **la** primitive de f sur I qui s'annule en a, elle diffère d'une autre primitive de f par une constante.

TFCI Si F est une primitive de F, alors $\int_a^b f = [F]_a^b = F(b) - F(a)$.

Méthodes de calcul (primitive, IPP, changement de variable, intégration d'une fonction rationnelle, cas particuliers (avec P un poynôme, $P(x)e^{\alpha x}$,$P(x)\sin x$, $e^{\alpha x}\sin(\beta x)$, $\cos^m x \sin^p x$, $P(x)\ln x$, $P(x)\arctan x$)

Théorème de Cauchy-Lipschitz On considère une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 1 et normalisée, i.e. de la forme

$$(E) : x' + a(t)x = b(t),$$

où a et b sont des fonctions continues sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$ et x une fonction inconnue dérivable sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Le problème de Cauchy associé à l'équation (E) et à la condition initiale $x(t_0) = x_0$ (avec t_0 donné dans I et x_0 donné dans $\mathbb{K}$) admet une unique solution.

Savoir résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 1. Savoir utiliser la méthode de la variation de la constante. Connaître la structure de l'espace des solutions de l'équation homogène associée et de (E).

Théorème de Cauchy-Lipschitz On considère une équation linéaire scalaire d'ordre 2 normalisée

$$(E) : y'' + ay' + by = c(t),$$

où a et b sont des constantes, c est une fonction continue sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$ et y est une fonction inconnue de classe $\mathcal{C}^2$ sur I.
Soit $t_0 \in I$, $(u_0, v_0) \in \mathbb{K}^2$. Le problème de Cauchy associé à (E) et à la condition initiale $y(t_0) = u_0, y'(t_0) = v_0$ admet une unique solution sur I.

Savoir résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 2, où c est de la forme $t \mapsto P(t)e^{\alpha t}$, avec α un réel et P un polynôme. Connaître la structure des espaces solutions.

Intégration sur un intervalle quelconque

De manière générale :

Intégrale généralisée convergente, sur un intervalle semi-ouvert, puis sur un intervalle quelconque

Comparaison par inégalité de la convergence de l'intégrale de deux fonctions positives ; comparaison par inégalité de deux fonctions intégrables ou non.

Comparaison par équivalence, o ou O de deux fonctions intégrables ou non sur I.

Intégrales de Riemann ($\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}dt$ converge ssi $\alpha < 1$; $\displaystyle\int_1^{+}\infty\frac{1}{t^\alpha}dt$ converge ssi $\alpha > 1$), $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}dt$ converge ssi $\alpha > 0$; $\displaystyle\int_0^1 \ln t dt$ converge ; **Avec preuve**.

Propriétés de l'intégrale (Linéarité, positivité, croissance, définie positivité pour une fonction continue, fonctions à valeurs complexes). Savoir que ces propriétés se déduisent de celles de l'intégrale sur un segment par passage à la limite, sous réserve de l'existence d'une telle limite.

Fonctions intégrables : Soit $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$. On dit que f est **intégrable** sur I lorsque $\int_I |f(t)|\ dt$ converge.
On dit aussi que l'intégrale $\int_I f(t)\ dt$ est **absolument convergente**.

Du soin dans la rédaction est attendu, en particulier en ce qui concerne la convergence et la valeur des intégrales impropres.
Exemple : prouver la convergence et donner la valeur de $\int_a^b f(t)dt$ (si la fonction f n'est pas continue en a et/ou b ou borne(s) infinie(s))
☞ On pose $I_{x,y} = \int_x^y f$. [Calcul d'une primitive F de f] Puisque F est une primitive de f sur $]a, b[$, $I_{x,y} = F(y) - F(x)$. Or, la limite en b et en a de F existe et $\lim\limits_{t\to b} F(t) = l$ et $\lim\limits_{t\to a} F(t) = l'$, donc $\boxed{\text{l'intégrale est convergente}}$ et $\boxed{\int_a^b f(t)dt = l - l'}$.