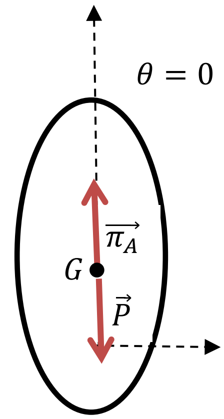
Correction concours blanc sciences physiques

Problème 3 : Système à corps oscillant pour production d'énergie hydraulique :

(D'après e3a PSI 2018)



Q1. En absence de houle, quand le système est immobile, les 2 forces qui agissent sur le corps oscillant sont la **poussée d'Archimède et le poids**.

Le système est alors soumis à 2 forces : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\overrightarrow{u_z}$ et $\overrightarrow{\pi_A} = \rho_e V g\, \overrightarrow{u_z}$;

Pour que $\theta = 0$ soit une position d'équilibre stable, il faut que **$\|\overrightarrow{\pi_A}\|$ soit supérieur à $\|\vec{P}\|$.**

D'où l'inégalité : $\rho_e V g > mg$; Qui se simplifie en $\boxed{\rho_e V > m}$.

Q2. On doit calculer le moment scalaire des forces.

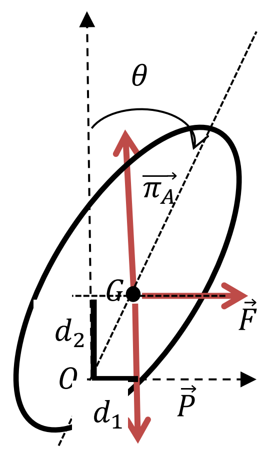
On va utiliser la notion de bras de levier.

Rappel : $|\mathcal{M}_\Delta(\vec{F})| = d. \|\vec{F}\|$ où d est la distance bras de levier.

Le poids et la poussée d'Archimède s'appliquent en G d'après l'énoncé, avec $OG = d$.

Il y a en tout 5 forces à considérer :

- La réaction de contact passant par O. Alors $\boxed{\mathcal{M}_{Oy}(\overrightarrow{Réaction}) = 0}$ car la distance bras de levier est nulle ; La réaction passe par l'axe de rotation.



- Le poids : Le poids s'applique en G d'après l'énoncé, avec $OG = d$.

$|\mathcal{M}_{Oy}(\vec{P})| = d_1. \|\vec{P}\|$ en utilisant le bras de levier avec $d_1 = d \sin\theta$.

De plus le poids a tendance à faire tourner le système dans le sens $\theta > 0$.

D'où : $\boxed{\mathcal{M}_{Oy}(\vec{P}) = mgd\sin\theta}$.

- La Poussée d'Archimède : La poussée d'Archimède s'applique en G d'après l'énoncé, avec $OG = d$. $|\mathcal{M}_{Oy}(\overrightarrow{\pi_A})| = d_1. \|\overrightarrow{\pi_A}\|$ en utilisant le bras de levier avec $d_1 = d\sin\theta$.

De plus la poussée d'Archimède a tendance à faire tourner le système dans le sens $\theta < 0$.

D'où : $\boxed{\mathcal{M}_{Oy}(\overrightarrow{\pi_A}) = -\rho_e V g\, d \sin\theta}$.

- Le couple résistant de moment par rapport à O est $\vec{C} = -\alpha\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_y}$;

Alors $\mathcal{M}_{Oy}(\overrightarrow{Couple}) = -\alpha\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_y}.\overrightarrow{u_y}$; Soit $\boxed{\mathcal{M}_{Oy}(\overrightarrow{Couple}) = -\alpha\,\dot{\theta}.}$

- La force de houle : $\vec{F} = \beta\cos(\omega t)\ \overrightarrow{u_x}$. Elle s'applique en G d'après l'énoncé.

$|\mathcal{M}_{Oy}(\vec{F})| = d_2. \|\vec{F}\|$ en utilisant le bras de levier avec $d_2 = d\cos\theta$.

De plus la force $\vec{F}$ a tendance à faire tourner le système dans le sens $\theta > 0$.

D'où : $\boxed{\mathcal{M}_{Oy}(\vec{F}) = \beta\cos(\omega t)\, d\cos\theta}$.

Q3. Application du théorème du moment cinétique scalaire pour un solide :

$$J_{Oy}\frac{d\omega}{dt} = \mathcal{M}_{Oy}(\vec{P}) + \mathcal{M}_{Oy}(\overrightarrow{liaison\ pivot}) + \mathcal{M}_{Oy}(\overrightarrow{\pi_A}) + \mathcal{M}_{Oy}(\overrightarrow{Couple}) + \mathcal{M}_{Oy}(\vec{F}).$$

Soit : $J\,\ddot{\theta} = mgd\sin\theta - \rho_e V g\, d\sin\theta - \alpha\,\dot{\theta} + \beta\cos(\omega t)\, d\cos\theta$

Ou encore : $\boxed{J\,\ddot{\theta} + \alpha\,\dot{\theta} + (\rho_e V - m)g\, d\sin\theta = \beta\cos(\omega t)\, d\cos\theta}$.

Q4. Approximation des petits angles : $\sin\theta \approx \theta$ et $\cos\theta \approx 1$;

L'équation précédente devient : $J\,\ddot{\theta} + \alpha\,\dot{\theta} + (\rho_e V - m)gd\,\theta = \beta d\cos(\omega t)$.

Ou encore : $\boxed{\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{J}}\ \dot{\boldsymbol{\theta}} + \frac{(\boldsymbol{\rho_e V - m})\boldsymbol{gd}}{\boldsymbol{J}}\ \boldsymbol{\theta} = \frac{\boldsymbol{\beta d}}{\boldsymbol{J}}\mathbf{cos}(\boldsymbol{\omega t})}$.

De la forme $\ddot{\theta} + \lambda\,\dot{\theta} + \omega_0^2\,\theta = f(t)$ avec $\boxed{\boldsymbol{\lambda} = \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{J}}}$; $\boxed{\boldsymbol{\omega_0} = \sqrt{\frac{(\boldsymbol{\rho_e V - m})\boldsymbol{gd}}{\boldsymbol{J}}}}$ et $f\boxed{(\boldsymbol{t}) = \frac{\boldsymbol{\beta d}}{\boldsymbol{J}}\mathbf{cos}(\boldsymbol{\omega t})}$.

Q5. En régime sinusoïdal forcé : Passage aux complexes : $\frac{d^2\underline{\theta}}{dt^2} + \lambda\,\frac{d\underline{\theta}}{dt} + \omega_0^2\underline{\theta} = \underline{f(t)}$

De plus, on sait qu'une dérivée par rapport au temps correspond à une multiplication par $j\omega$ de la grandeur et une dérivée seconde à une multiplication par $-\omega^2$. Alors il vient : $\left(-\omega^2 + j\omega\lambda + \omega_0^2\right)\underline{\theta} = \frac{\beta d}{J}e^{j\omega t}$

Et en divisant par $e^{j\omega t}$, on obtient : $\underline{\theta_0} = \frac{\frac{\beta d}{J}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\,\lambda}$; Enfin $\boxed{\boldsymbol{\theta_0}(\boldsymbol{\omega}) = \left|\underline{\boldsymbol{\theta_0}}\right| = \frac{\frac{\boldsymbol{\beta d}}{\boldsymbol{J}}}{\sqrt{(\boldsymbol{\omega_0^2 - \omega^2})^2 + (\boldsymbol{\lambda\omega})^2}}}$;

Q6. $P_r(t) = \gamma\,\dot{\theta}^2$; De plus, on a $\boldsymbol{\theta(t) = \theta_0}\ \mathbf{cos}(\boldsymbol{\omega t + \varphi})$; Alors $\dot{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{t}) = -\boldsymbol{\omega\theta_0}\ \mathbf{sin}(\boldsymbol{\omega t + \varphi})$.
Alors $P_r(t) = \gamma\,\omega^2\,{\theta_0}^2\,sin^2(\omega t + \varphi)$.
Ainsi $P_m = \langle P_r(t)\rangle = \gamma\,\omega^2\,{\theta_0}^2\,\langle sin^2(\omega t + \varphi)\,\rangle$.

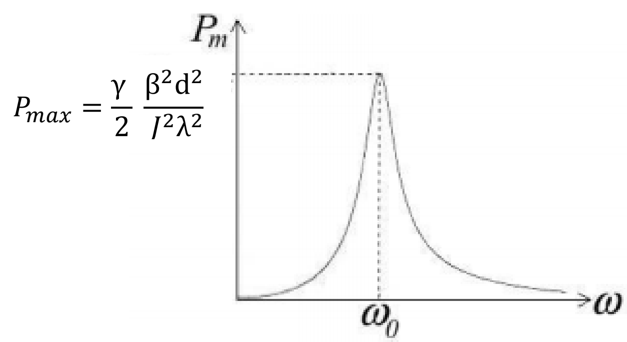
On sait que $\langle \boldsymbol{sin^2}(\boldsymbol{\omega t + \varphi})\,\rangle = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$; D'où : $\boxed{\boldsymbol{P_m} = \frac{\boldsymbol{\gamma\,\omega^2\,\theta_0}^2}{\mathbf{2}} = \frac{\boldsymbol{\gamma\,\omega^2}}{\mathbf{2}}\frac{\frac{\boldsymbol{\beta^2 d^2}}{\boldsymbol{J^2}}}{(\boldsymbol{\omega_0^2 - \omega^2})^2 + (\boldsymbol{\lambda\omega})^2}}$.

Q7.
Si ω → 0, alors $\boldsymbol{P_m}$ → 0
Si ω → +∞, alors $\boldsymbol{P_m}$→ 0.

On peut écrire P_m sous la forme : $\boldsymbol{P_m} = \frac{\boldsymbol{\gamma}}{\mathbf{2}}\frac{\frac{\boldsymbol{\beta^2 d^2}}{\boldsymbol{J^2}}}{\left(\frac{\boldsymbol{\omega_0^2}}{\boldsymbol{\omega}} - \boldsymbol{\omega}\right)^2 + \boldsymbol{\lambda^2}}$.

Alors le numérateur est constant et le dénominateur est une somme de deux carrés dont un seul terme peut s'annuler. Ainsi P_m passe par un max (résonnance) quand le dénominateur est min, donc pour $\underline{\boldsymbol{\omega_r = \omega_0}}$.

Et $\boxed{\boldsymbol{P_{max}} = \frac{\boldsymbol{\gamma}}{\mathbf{2}}\,\frac{\boldsymbol{\beta^2 d^2}}{\boldsymbol{J^2\lambda^2}}}$. D'où l'allure de la courbe ci-contre :



Q8. On a vu $\omega_0 = \sqrt{\frac{(\rho_e V - m)gd}{J}}$ avec $\approx md^2$, il vient : $\boxed{\boldsymbol{\omega_0} = \sqrt{\frac{(\boldsymbol{\rho_e V - m})\boldsymbol{g}}{\boldsymbol{md}}}}$.

<u>AN</u> : $\omega_0 = \sqrt{\frac{(10^6 - 3.10^5)\times 10}{3.10^5 \times 10}}$. On trouve $\underline{\boldsymbol{\omega_0} \approx \mathbf{1,5\ rad.s^{-1}}}$ et $\boxed{\boldsymbol{T_0} = \frac{\mathbf{2\pi}}{\boldsymbol{\omega_0}} = \mathbf{2}\boldsymbol{\pi}\sqrt{\frac{\boldsymbol{md}}{(\boldsymbol{\rho_e V - m})\boldsymbol{g}}}}$; <u>AN</u> : $\underline{\boldsymbol{T_0} \approx \mathbf{4,1\ s}}$.

Problème 4 : La mission Parker Solar Probe : *(D'après Centrale Supelec MP 2018)*

Q1. On utilise ici la **troisième loi de Kepler** : $\frac{T^2}{a^3} = cste = \frac{4\pi^2}{G\,M_s} = \frac{T_T^2}{{r_T}^3}$ où $\underline{T_T = 365,25\text{ jours}}$ est la période de révolution de la terre autour du soleil et r_T = 1 u.a. d'après l'énoncé.

On en conclut que $\boldsymbol{T = T_T\left(\frac{a}{r_T}\right)^{3/2}}$.

De plus, le demi grand axe de l'orbite de PSP vérifie d'autre part : $\boldsymbol{2a = r_p + r_a}$. Finalement, on obtient :

$\boxed{T = T_T\left(\frac{r_p+r_a}{2\,r_T}\right)^{3/2}}$. AN : $T = 365,25\left(\frac{4,6\times10^{-2}+0,73}{2\times1}\right)^{3/2}$. On trouve $\underline{\boldsymbol{T} \approx \textbf{88 jours}}$.

Q2. En appliquant la conservation de l'énergie mécanique et la valeur de l'énergie mécanique pour une orbite elliptique, on trouve :$\boldsymbol{E_m = \frac{k}{2a} = -\frac{G\,m_{PSP}\,M_S}{2a} = \frac{1}{2}\,m_{PSP}\,v^2 - \frac{G\,m_{PSP}\,M_S}{r}}$.

Expression qui se simplifie en $\frac{G\ M_S}{2a} = -\frac{v^2}{2} + \frac{G\ M_S}{r}$; Ainsi en r_p, il vient : $\frac{G\ M_S}{2a} = -\frac{{v_p}^2}{2} + \frac{G\ M_S}{r_p}$

Soit ${v_p}^2 = \frac{2\,G\,M_S}{r_p} - \frac{G\ M_S}{a} = G\ M_S\left(\frac{2}{r_p} - \frac{1}{a}\right)$; Et enfin : $\boldsymbol{v_p = \sqrt{G\,M_S\left(\frac{2}{r_p} - \frac{1}{a}\right)}}$; or $\boldsymbol{a = \frac{r_p+r_a}{2}}$.

Alors : $\boxed{\boldsymbol{v_p = \sqrt{2GM_S\left(\frac{1}{r_p} - \frac{1}{r_p+r_a}\right)}}}$;

AN : $v_p = \sqrt{2\times6{,}67408.10^{-11}\times1{,}99.10^{30}\left(\frac{1}{4{,}6\times10^{-2}\times1{,}5\times10^{11}} - \frac{1}{(4{,}6\times10^{-2}+0{,}73)\times1{,}5\times10^{11}}\right)}$

On trouve : $\underline{\boldsymbol{v_p} \approx \textbf{19,0.10}^{4}\textbf{ m.s}^{-1}\textbf{ = 190 km.s}^{-1}}$.

Q3. On donne $r(\theta) = \frac{p}{1+e\cos\theta}$.

Ainsi r est min, qd $\cos\theta$ est max, soit pour $\cos\theta = 1$, alors $\boldsymbol{r_{min} = r_p = \frac{p}{1+e}}$;

De même, r est max, qd $\cos\theta$ est min, soit pour $\cos\theta = -1$, alors $\boldsymbol{r_{max} = r_a = \frac{p}{1-e}}$

On fait le rapport des deux relations : $\frac{r_a}{r_p} = \frac{\frac{p}{1-e}}{\frac{p}{1+e}} = \frac{1+e}{1-e}$; Soit $r_a(1-e) = r_p(1+e)$

Ou encore $e(r_a + r_p) = r_a - r_p$; Ainsi $\boxed{\boldsymbol{e = \frac{r_a-r_p}{r_a+r_p}}}$.

Enfin $p = r_a(1-e) = r_a\left(1 - \frac{r_a-r_p}{r_a+r_p}\right) = r_a\left(\frac{r_a+r_p-r_a+r_p}{r_a+r_p}\right)$; On en déduit : $\boxed{\boldsymbol{p = \frac{2\,r_a\,r_p}{r_a+r_p}}}$.

AN : $e = \frac{0{,}73\times1{,}5\times10^{11} - 4{,}6\times10^{-2}\times1{,}5\times10^{11}}{0{,}73\times1{,}5\times10^{11} + 4{,}6\times10^{-2}\times1{,}5\times10^{11}}$; Soit $e = \frac{0{,}73-0{,}046}{0{,}73+0{,}046}$; On trouve $\underline{\boldsymbol{e} \approx \textbf{0,88.}}$

Et $p = \frac{2\times0{,}73\times1{,}5\times10^{11}\times4{,}6\times10^{-2}\times1{,}5\times10^{11}}{0{,}73\times1{,}5\times10^{11}+4{,}6\times10^{-2}\times1{,}5\times10^{11}}$; Soit $p = \frac{2\times0{,}73\times1{,}5\times10^{11}\times4{,}6\times10^{-2}}{0{,}73+0{,}046}$.

On trouve $\underline{\boldsymbol{p} \approx \textbf{1,30.10}^{\textbf{10}}\textbf{ m} \approx \boldsymbol{0,086}\textbf{ u.a}}$.

Q4. Question difficile ! On exprime d'abord l'angle θ_{10} correspondant à r_{10}.

Pour $r = r_{10}$, on a $r_{10} = \frac{p}{1+e\cos\theta_{10}}$; Soit $1 + e\cos\theta_{10} = \frac{p}{r_{10}}$;

D'où $e\cos\theta_{10} = \frac{p}{r_{10}} - 1$ et $\cos\theta_{10} = \frac{p-r_{10}}{e\,r_{10}}$; Soit $\boxed{\boldsymbol{\theta_{10} = \arccos\left(\frac{p-r_{10}}{e\,r_{10}}\right) = \arccos\left(\frac{p-10\,R_S}{10\,e\,R_S}\right)}}$

AN : $\theta_{10} = \arccos\left(\frac{1{,}3.10^{10}-10\times6{,}96.10^{8}}{10\times0{,}88\times6{,}96.10^{8}}\right)$; On trouve $\underline{\boldsymbol{\theta_{10} \approx 9,5° \approx 0,17\text{ rad}}}$.

Le secteur angulaire concerné est $\underline{\boldsymbol{2\theta_{10}}}$, par symétrie et il est parcouru à la vitesse quasi constante v_p.

Soit $\boxed{\boldsymbol{\tau = \frac{d}{v_p} = \frac{2\,r_p\theta_{10}}{v_p}}}$; AN : $\tau = \frac{2\times4{,}6\times10^{-2}\times1{,}5\times10^{11}\times0{,}17}{19.10^{4}}$; On trouve : **τ ≈ 12347 s ; soit environ 3,4 h**.

Il faut donc que **la sonde puisse résister un peu moins de 4 h à ces températures extrêmes**.