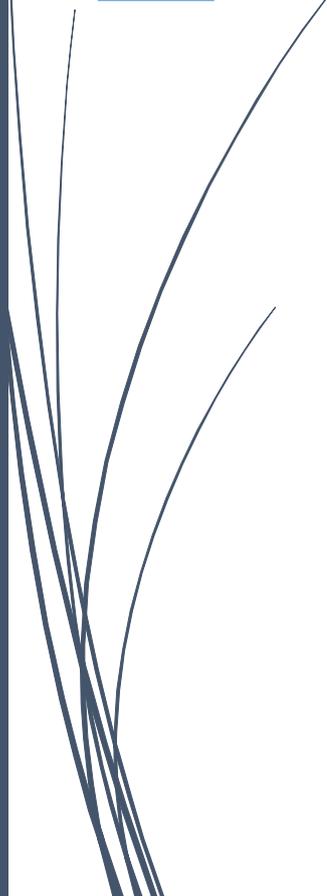
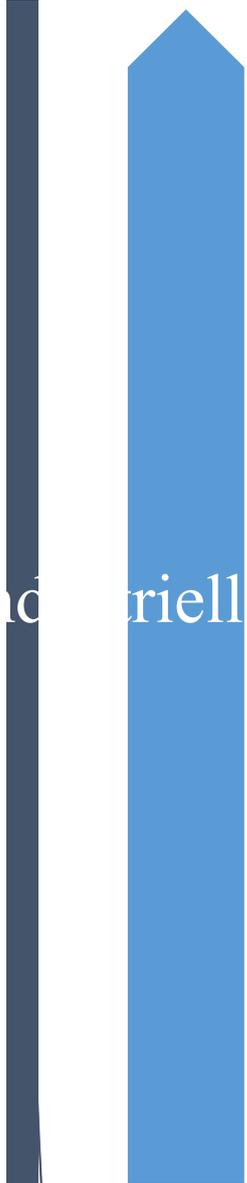


o
riell

Valider les performances cinématiques d'un mécanisme (partie 2)

PCSI 2019-2020



Desvaux Melaine
CPGE lycée Brizeux, Quimper

Table des matières

1. Analyser un modèle cinématique d'un mécanisme complexe	2
1.1 Degrés de liberté d'une liaison usuelle parfaite.....	2
1.2 Torseur cinématique d'une liaison	2
1.3 Liaisons usuelles parfaites	2
2. Elaborer un modèle cinématique d'un mécanisme complexe.....	6
2.1 Présentation générale des éléments de guidage	6
2.2 Modélisation des guidages sans interposition d'éléments roulants.....	6
2.3 Modélisation des guidages réalisés par interposition d'éléments roulants	7
2.4 Démarche de construction d'un schéma cinématique	8
3. Imposer la position d'un mécanisme en chaîne fermée	10
3.1 Cas des chaînes fermées avec un seul actionneur	10
3.2 Paramètres de mouvement d'entrée et de sortie	10
3.3 Loi entrée-sortie par fermeture géométrique	11
3.4 Linéarisation d'une loi entrée-sortie	12
4. Imposer la vitesse d'un mécanisme en chaîne fermée	13
4.1 Obtention de la loi entrée-sortie en vitesse par dérivation.....	13
4.2 Obtention de la loi entrée-sortie en vitesse par fermeture géométrique en vitesse	13
5. Imposer la vitesse d'un mécanisme potentiellement glissant	14
5.1 Notion de roulement, pivotement et glissement.....	14
5.2 Résolution de la vitesse à partir de l'hypothèse de Roulement Sans Glissement (RSG).....	15
Sources	15

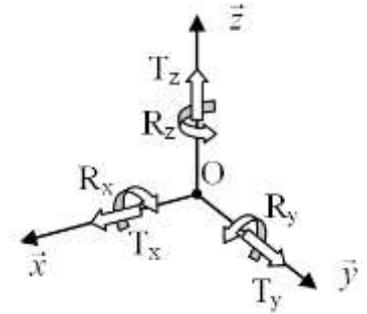
1. Analyser un modèle cinématique d'un mécanisme complexe

1.1 Degrés de liberté d'une liaison usuelle parfaite

Les **degrés de liberté** d'une liaison sont les **mouvements élémentaires indépendants** autorisés par la liaison. Les autres mouvements élémentaires sont supposés **bloqués** et appelés **degré de liaison**.

Dans un **repère local associé à la liaison** $R = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, les degrés de liberté correspondent à :

- des **rotations**, notées R_{0x} , R_{0y} et R_{0z} ;
- des **translations**, notées T_x , T_y et T_z .



Pour une liaison : **Nombre de degré de liberté + Nombre de degré de liaison = 6.**

1.2 Torseur cinématique d'une liaison

Rappel : on note le **torseur cinématique d'une liaison** entre 1 et 2 :

$$\{V_{2/1}\} = \begin{cases} \vec{\Omega}_{2/1} \\ \vec{V}_{A \in 2/1} \end{cases} = \begin{cases} \omega_x \cdot \vec{x} + \omega_y \cdot \vec{y} + \omega_z \cdot \vec{z} \\ V_x \cdot \vec{x} + V_y \cdot \vec{y} + V_z \cdot \vec{z} \end{cases}$$

Ce dernier caractérise une liaison en définissant les **paramètres cinématiques (paramètres de vitesse)** associés à chaque **degré de liberté**. Chaque paramètre cinématique non nul correspond à un degré de liberté (les paramètres cinématiques sont les dérivés des paramètres de mouvement). On allègera l'écriture quand :

- il n'y a pas d'ambiguïté dans le numéro des solides (< 10) : $\{V_{2/1}\} = \begin{cases} \omega_x \cdot \vec{x} + \omega_y \cdot \vec{y} + \omega_z \cdot \vec{z} \\ V_x \cdot \vec{x} + V_y \cdot \vec{y} + V_z \cdot \vec{z} \end{cases}$
- il n'y a qu'une seule composante pour un vecteur : $\{V_{2/1}\} = \begin{cases} \omega_x \cdot \vec{x} \\ V_x \cdot \vec{x} + V_y \cdot \vec{y} + V_z \cdot \vec{z} \end{cases}$

1.3 Liaisons usuelles parfaites

Les **liaisons usuelles** correspondent à des modèles souvent utilisés car elles sont associées à des réalisations matérielles courantes. Elles font l'objet d'une **norme** qui définit les différentes combinaisons de degré de liberté et de degré de liaison.

Informations définies sur les graphes de liaison et sur les schémas cinématiques

Exemple d'informations associées à une liaison pivot d'axe (A, \vec{x}) :

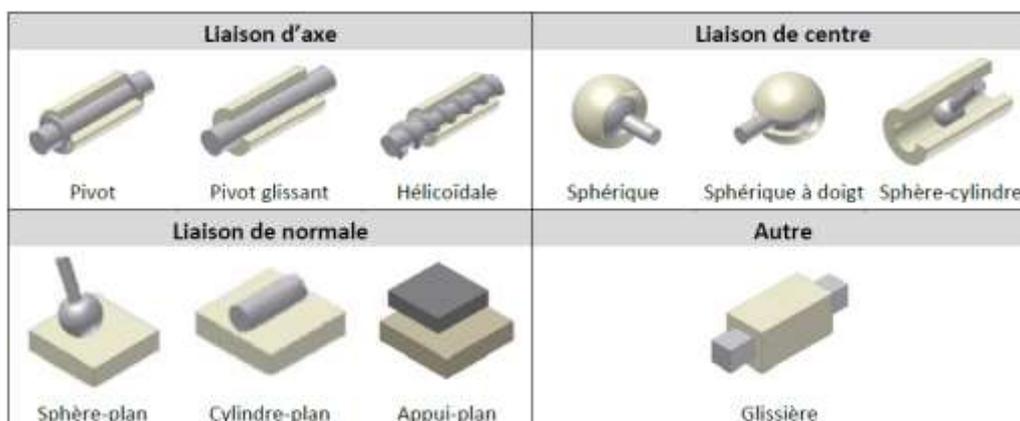
Nom : Liaison pivot	Intitulé normalisé
Caractéristique(s) géométrique(s) : d'axe (A, \vec{x})	Indication indispensable. Les caractéristiques géométriques complètent la définition de la liaison.
<p style="text-align: center;">Symboles de représentation 2D et 3D :</p>	Symboles normalisés permettant d'identifier le nom et les caractéristiques géométriques.

Informations associées

Exemple d'informations associées à une liaison pivot d'axe (A, \vec{x}) :

Degré de liberté : 1 degré de liberté R_{Ax}	Les degrés de liberté s'appuient sur un repère de liaison défini à partir des caractéristiques géométriques.
<p style="text-align: center;">Torseur cinématique :</p> $\{V_{2/1}\} = \begin{cases} \omega_{x\ 2/1} \cdot \vec{x} \\ \vec{0} \end{cases} \quad \forall P \in (A, \vec{x})$ <p style="text-align: center;">Paramètre cinématique : $\omega_{x\ 2/1}$</p>	<p>Exprimé en un point du domaine de validité.</p> <p>Il y a autant de paramètres cinématiques que de degré de liberté.</p>
<p style="text-align: center;">Torseur des actions mécaniques transmissibles :</p> $\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{cases} X_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{x} + Y_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{y} + Z_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{z} \\ M_{A, 1 \rightarrow 2} \cdot \vec{y} + N_{A, 1 \rightarrow 2} \cdot \vec{z} \end{cases}$	<p>Exprimé en un point du domaine de validité.</p> <p>Il y a autant d'inconnues de liaison que de degré de liaison.</p>
Domaine de validité : Droite (A, \vec{x})	Lieu des points pour lesquels la forme du torseur est conservée.

Figures représentant les différentes liaisons pour une meilleure compréhension



Liaisons de normale					
NOM et caractéristique(s) géométrique(s)	Représentation 3D	Représentation 2D	Forme du torseur cinématique	Domaine de validité	
				Forme du torseur des actions mécaniques transmissibles	
<p>GLISSIERE de direction \vec{x}</p>			$\{V_{2/1}\} = \begin{cases} 0 \\ v_A \end{cases} \begin{cases} v_{x,A \in 2/1} \vec{x} \end{cases}$ <p><i>Zone de validité : pour tout point A (champ uniforme)</i></p>	$\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{cases} Y_{1 \rightarrow 2} \vec{y} + Z_{1 \rightarrow 2} \vec{z} \\ v_A \begin{cases} L_{A,1 \rightarrow 2} \vec{x} + M_{A,1 \rightarrow 2} \vec{y} + N_{A,1 \rightarrow 2} \vec{z} \end{cases} \end{cases}$	
<p>APPUI PLAN de normale \vec{z}</p>			$\{V_{2/1}\} = \begin{cases} v_{A,2/1} \vec{z} \\ v_A \begin{cases} v_{x,A \in 2/1} \vec{x} + v_{y,A \in 2/1} \vec{y} \end{cases} \end{cases}$ <p><i>Zone de validité : pour tout point A</i></p>	$\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{cases} Z_{1 \rightarrow 2} \vec{z} \\ v_A \begin{cases} L_{A,1 \rightarrow 2} \vec{x} + M_{A,1 \rightarrow 2} \vec{y} \end{cases} \end{cases}$	
<p>CYLINDRE-PLAN de ligne de contact (O, \vec{x}) et de normale \vec{z}</p>			$\{V_{2/1}\} = \begin{cases} v_{A,2/1} \vec{z} \\ v_A \begin{cases} v_{x,A \in 2/1} \vec{x} + v_{y,A \in 2/1} \vec{y} \end{cases} \end{cases}$ <p><i>Zone de validité : pour tout point A appartenant au plan (O, \vec{x}, \vec{z})</i></p>	$\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{cases} Z_{1 \rightarrow 2} \vec{z} \\ v_A \begin{cases} M_{A,1 \rightarrow 2} \vec{y} \end{cases} \end{cases}$	
<p>SPHERE-PLAN de point de contact O et de normale \vec{z}</p>			$\{V_{2/1}\} = \begin{cases} v_{A,2/1} \vec{z} \\ v_A \begin{cases} v_{x,A \in 2/1} \vec{x} + v_{y,A \in 2/1} \vec{y} \end{cases} \end{cases}$ <p><i>Zone de validité : pour tout point A appartenant à la droite (O, \vec{z})</i></p>	$\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{cases} Z_{1 \rightarrow 2} \vec{z} \\ v_A \begin{cases} 0 \end{cases} \end{cases}$	

Tableau des liaisons parfaites usuelles

Le tableau suivant recense les liaisons usuelles.

Nom, caractéristiques géométriques et symboles sont à connaître.

Degrés de liberté et degré de liaison associés, domaine de validité, torseur cinématique et torseur des actions mécaniques transmissibles sont à retrouver sans erreur.

Liaisons de centre		Liaisons d'axe		NOM et caractéristique(s) géométrique(s)	Représentation 3D	Représentation 2D	Forme du torseur cinématique	Forme du torseur des actions mécaniques transmissibles
SPHERE-CYLINDRE de centre O et de direction \vec{x}		PIVOT d'axe (O, \vec{x})		$\{V_{2/1}\} = \begin{cases} \omega_{x,2/1} \vec{x} \\ 0 \\ 0 \end{cases}$ <i>Zone de validité : pour tout point A appartenant à la droite (O, \vec{x})</i>	$\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{cases} X_{1 \rightarrow 2} \vec{x} + Y_{1 \rightarrow 2} \vec{y} + Z_{1 \rightarrow 2} \vec{z} \\ M_{A,1 \rightarrow 2} \vec{y} + N_{A,1 \rightarrow 2} \vec{z} \end{cases}$			
SPHERIQUE de centre O		HELICOÏDALE d'axe (O, \vec{x}) de pas et de sens à droite / à gauche		$\{V_{2/1}\} = \begin{cases} \omega_{x,2/1} \vec{x} \\ \pm \omega_{y,2/1} \vec{y} \\ \pm \omega_{z,2/1} \vec{z} \end{cases}$ <i>Zone de validité : pour tout point A appartenant à la droite (O, \vec{x})</i>	$\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{cases} X_{1 \rightarrow 2} \vec{x} + Y_{1 \rightarrow 2} \vec{y} + Z_{1 \rightarrow 2} \vec{z} \\ M_{A,1 \rightarrow 2} \vec{y} + N_{A,1 \rightarrow 2} \vec{z} \end{cases}$			
				$\{V_{2/1}\} = \begin{cases} \omega_{x,2/1} \vec{x} \\ \pm \omega_{y,2/1} \vec{y} \\ \pm \omega_{z,2/1} \vec{z} \end{cases}$ <i>Zone de validité : pour tout point A appartenant à la droite (O, \vec{x})</i>	$\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{cases} X_{1 \rightarrow 2} \vec{x} + Y_{1 \rightarrow 2} \vec{y} + Z_{1 \rightarrow 2} \vec{z} \\ M_{A,1 \rightarrow 2} \vec{y} + N_{A,1 \rightarrow 2} \vec{z} \end{cases}$			
				$\{V_{2/1}\} = \begin{cases} \omega_{x,2/1} \vec{x} \\ \pm \omega_{y,2/1} \vec{y} \\ \pm \omega_{z,2/1} \vec{z} \end{cases}$ <i>Zone de validité : pour tout point A appartenant à la droite (O, \vec{x})</i>	$\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{cases} X_{1 \rightarrow 2} \vec{x} + Y_{1 \rightarrow 2} \vec{y} + Z_{1 \rightarrow 2} \vec{z} \\ M_{A,1 \rightarrow 2} \vec{y} + N_{A,1 \rightarrow 2} \vec{z} \end{cases}$			

2. Elaborer un modèle cinématique d'un mécanisme complexe

2.1 Présentation générale des éléments de guidage

Les technologies de guidage

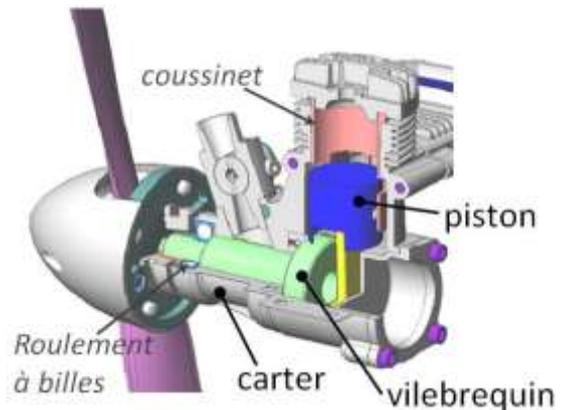
Les **guidages** sont les **réalisations** concrètes des liaisons. Ils utilisent différentes technologies :

- réalisation par **contact direct** ;
- interposition **d'éléments glissants** (coussinet, ...) ;
- interposition **d'éléments roulants** (roulements à billes, ...) ;
- **sans contact** (paliers magnétiques).

Exemple : Micromoteur thermique d'aéromodélisme :

Liaison piston/carter : interposition d'un élément glissant (coussinet).

Liaison vilebrequin/carter : interposition de deux éléments roulants (2 roulements à billes).



Démarche et hypothèse pour modéliser un guidage

La **démarche** utilisée pour modéliser un guidage dépend de sa technologie :

- pour un contact direct ou une interposition d'éléments glissants → **analyse des contacts** ;
- pour une interposition d'éléments roulants → **modèle fonctionnel**.

Remarque : en fonction de l'objectif de l'étude, un même guidage peut être modélisé différemment afin de mettre en évidence telle ou telle propriété.

Les liaisons sont supposées **cinématiquement parfaites** :

- **sans jeux** (jeux = espace entre deux surfaces permettant des mouvements de petite amplitude) ;
- de rigidité infinie ;
- de géométrie des surfaces en contact supposée parfaite ;
- sans limite d'amplitude des mouvements ;
- sans limite de vitesse des mouvements ;
- **bilatérale** (mouvements bloqués ou autorisés dans les deux sens de translation ou de rotation).

Les caractéristiques géométriques de la liaison sont donc supposées indépendantes des mouvements et des efforts transmis.

2.2 Modélisation des guidages sans interposition d'éléments roulants

Dans les guidages réalisés par **contact direct** ou par **interposition d'éléments glissants**, c'est le **contact** entre la **surface** d'un composant et la surface de l'autre composant qui réalise les **degrés de liaison**.

La **démarche d'analyse** est la suivante :

- 1- identifier la **géométrie** (supposée parfaite) des deux **surfaces en contact** : plan, cylindre, sphère...
- 2- **choisir**, à partir de la géométrie des surfaces de contact et de ses dimensions, **une liaison usuelle**

Exemple du contact au niveau de la liaison entre le piston et le carter du micromoteur

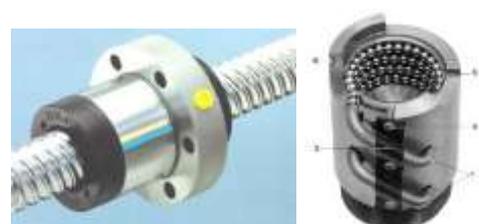
- si on suppose que la longueur L du piston n'est pas négligeable devant son diamètre d , $L \geq 0,25.d$, alors les surfaces en contact sont **cylindre/cylindre**. La liaison associée est alors une liaison **pivot glissant**.

- si on suppose que la longueur L du piston est faible par rapport à son diamètre d , $L < 0,25.d$ (le piston est un disque plutôt qu'un cylindre), alors les surfaces en contact sont **disque/cylindre**. La liaison associée est alors une liaison **sphère cylindre**.



2.3 Modélisation des guidages réalisés par interposition d'éléments roulants

Dans les guidages réalisés par **interposition d'éléments roulants**, c'est la **fonction cinématique du composant** qui donne un **modèle fonctionnel**.

<p style="text-align: center;">Douilles à billes</p>  <p>Utilisées en parallèle par 3 ou 4 (sur deux colonnes différentes) pour réaliser un guidage en translation. Modèle fonctionnel d'une douille seule : pivot glissant</p>	<p style="text-align: center;">Glissières à billes</p>  <p>Permet de réaliser un guidage en translation. Modèle fonctionnel : glissière</p>	<p style="text-align: center;">Vis à billes</p>  <p>Permet de réaliser un dispositif de transformation de mouvement vis-écrou (cf. Maxpid). Modèle fonctionnel : hélicoïdale</p>		
<table border="1" style="width: 100%;"> <tr> <td data-bbox="106 1344 646 1635"> <p style="text-align: center;">Roulements à billes</p>  </td> <td data-bbox="646 1344 1157 1635"> <p style="text-align: center;">Roulement à rouleaux ou à aiguilles</p>  </td> </tr> </table> <p>Utilisés par deux pour réaliser un guidage en rotation. Modèle fonctionnel d'un roulement seul :</p> <ul style="list-style-type: none"> - si aucun rotulage est admis : pivot ou pivot glissant - si le rotulage est admis : sphérique ou sphère/cylindre <p style="text-align: center;">Le centre est celui du roulement. Exemple : vilebrequin/carter page précédente</p>		<p style="text-align: center;">Roulements à billes</p> 	<p style="text-align: center;">Roulement à rouleaux ou à aiguilles</p> 	<p style="text-align: center;">Rotule lisse</p>  <p>Permet des mouvements de rotation selon 3 axes, dont 2 de faible amplitude. La zone de contact est une portion de sphère. Modèle fonctionnel : sphérique</p>
<p style="text-align: center;">Roulements à billes</p> 	<p style="text-align: center;">Roulement à rouleaux ou à aiguilles</p> 			

2.4 Démarche de construction d'un schéma cinématique

On suppose que le modèle cinématique est donné, sous la forme d'un graphe des liaisons par exemple. La démarche pour réaliser un schéma cinématique est la suivante :

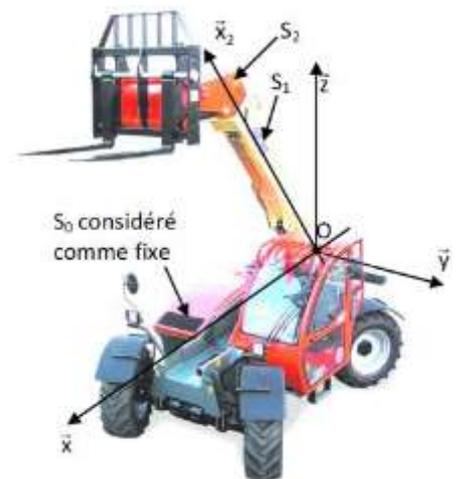
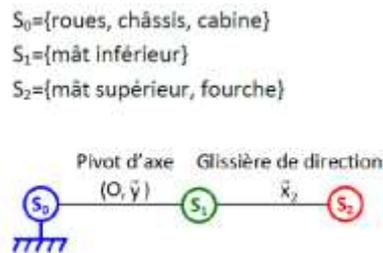
1. **dessiner les éléments géométriques**, centres (points), axes (droites), vecteurs, des liaisons en respectant leurs **positions relatives** (parallélisme, perpendicularité, coïncidence...);
2. **mettre en place les symboles des liaisons** usuelles, en s'appuyant sur le graphe des liaisons, en utilisant un code couleur et en respectant leur orientation. Si des liaisons se superposent, les déplacer suivant leur domaine de validité (exemple : une pivot suivant son axe, une glissière n'importe où, ...);
3. **relier les éléments des symboles de liaisons par des traits** qui sont de même couleur en respectant si possible l'architecture du système et en évitant que des traits se croisent.

S'il existe un système réel associé au modèle :

4. **vérifier la cohérence** entre les mouvements possibles entre les solides sur le schéma cinématique et les mouvements observés sur le système réel.

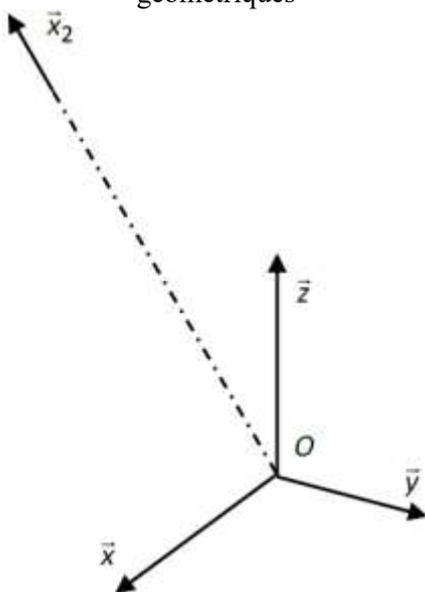
Exemple : nacelle élévatrice

Modèle :

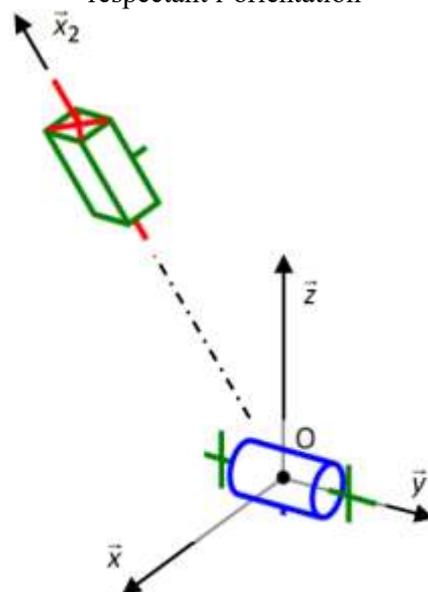


Construction du schéma cinématique

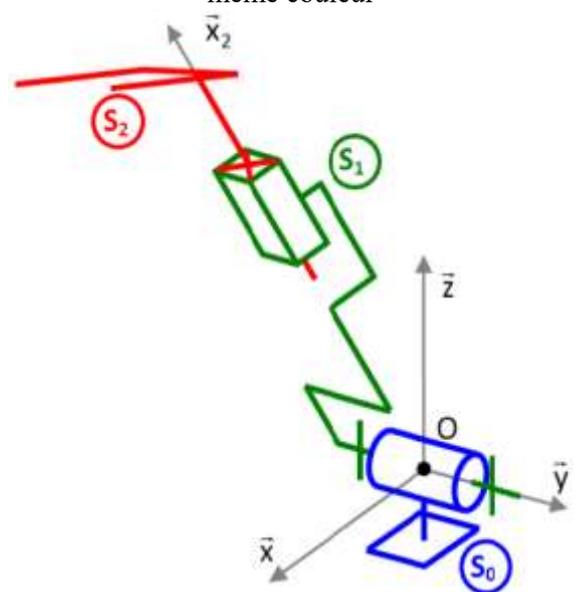
1. dessiner les éléments géométriques



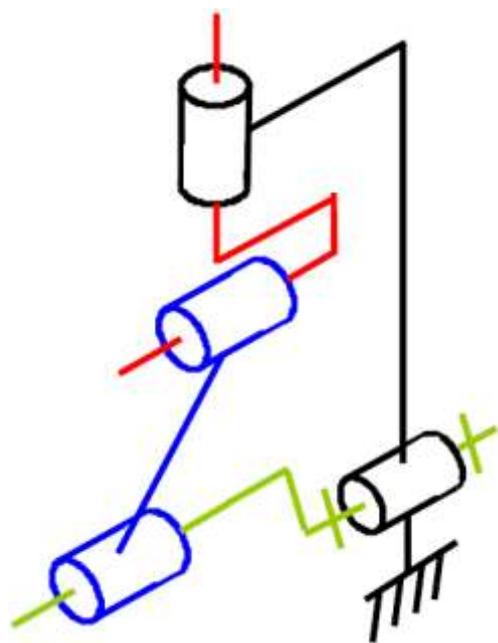
2. mettre en place les symboles en respectant l'orientation



3. relier les symboles par des traits qui sont de même couleur



Exemple : schéma cinématique du micromoteur thermique



3. Imposer la position d'un mécanisme en chaîne fermée

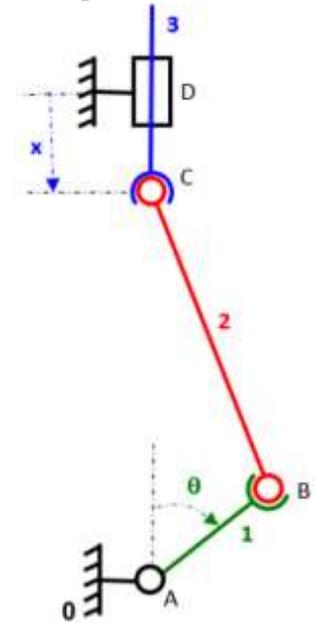
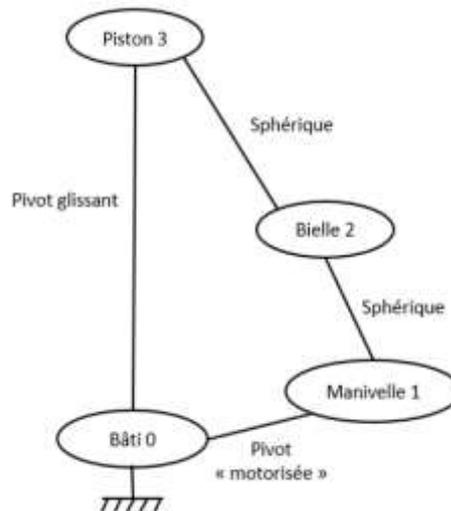
L'objectif de cette partie est de découvrir des démarches et des méthodes permettant d'obtenir la loi entrée-sortie en position d'un mécanisme en chaîne fermée.

3.1 Cas des chaînes fermées avec un seul actionneur

Pour rappel, dans un **mécanisme en chaîne fermée**, il y a en général **une seule liaison mise en mouvement à l'aide d'un actionneur**. C'est justement la structure bouclée du mécanisme qui fait que la mise en mouvement de cette liaison va entraîner celles de toutes les autres liaisons (en particulier celle liée à l'effecteur de la chaîne d'énergie-puissance).

Exemple : dispositif bielle-manivelle utilisé dans une pompe

La manivelle 1, animée d'un mouvement de rotation continue par rapport au bâti 0 grâce à un motoréducteur, permet la mise en translation alternative du piston 3 (voir vidéo de systèmes bielle-manivelle).



Par ailleurs, afin que le mécanisme soit montable, des **mobilités internes** peuvent être nécessaires. Pour trouver ces mobilités internes, on bloque « fictivement » les mouvements d'entrée et sortie du mécanisme et on relève ensuite les mouvements internes possibles et non contrôlés de solide.

Exemple (toujours avec le dispositif bielle-manivelle) :

Il existe une mobilité interne : la rotation de la bielle 2 autour de (BC).

Remarque : dans un logiciel de simulation, tel que Meca3D ou Solid Works, les mobilités internes seront bloquées (en imposant des contraintes géométriques supplémentaires ou une vitesse nulle).

3.2 Paramètres de mouvement d'entrée et de sortie

Sur toutes les chaînes fermées, il existe deux paramètres de mouvement :

- le paramètre de mouvement d'entrée (un de la liaison motrice, animée par l'actionneur) ;
- le paramètre de mouvement de sortie (un de la liaison en « sortie » qui anime l'effecteur).

Exemple : dispositif bielle-manivelle utilisé dans une pompe

- c'est le mouvement de rotation entre la manivelle 1 et le bâti 0 qui est motorisé. Son paramètre de mouvement θ est donc le paramètre de mouvement d'entrée ;
- c'est le mouvement de translation du piston 3 par rapport au bâti 0 qui créera l'aspiration ou le refoulement du fluide. Son paramètre de mouvement x est donc le paramètre de mouvement de sortie.

3.3 Loi entrée-sortie par fermeture géométrique

On appelle loi entrée-sortie en position d'un mécanisme en chaîne fermée, la relation mathématique entre le paramètre de position d'entrée et celui de sortie.

Exemple du dispositif bielle-manivelle : la loi entrée-sortie en position est : $x = f_1(\theta)$ ou $\theta = g_1(x)$

Démarche pour déterminer cette loi entrée-sortie en position

1. Écrire la relation vectorielle de fermeture géométrique de la chaîne de solide.

→ relation de Chasles entre les **points caractéristiques des liaisons** en parcourant la chaîne fermée :
 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \dots + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$

2. **Projeter l'équation de fermeture ci-dessus** dans une base adaptée afin d'obtenir un système de 3 équations scalaires comportant les paramètres de mouvement d'entrée et de sortie.

3. Éliminer les paramètres de mouvement autres que ceux d'entrée et de sortie, en combinant les équations obtenues.

Méthode pour éliminer un angle β présent dans 2 équations en cosinus et sinus :

Isoler le cosinus et le sinus, mettre les 2 équations au carré et les sommer :

$$\begin{cases} f(\theta_e, \theta_s) + R \cdot \cos(\beta) = 0 \\ g(\theta_e, \theta_s) + R \cdot \sin(\beta) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} R^2 \cdot \cos^2(\beta) = f^2(\theta_e, \theta_s) & (1) \\ R^2 \cdot \sin^2(\beta) = g^2(\theta_e, \theta_s) & (2) \end{cases}$$

$$(1) + (2) \rightarrow R^2 \cdot \cos^2(\beta) + R^2 \cdot \sin^2(\beta) = f^2(\theta_e, \theta_s) + g^2(\theta_e, \theta_s) \rightarrow R^2 = f^2(\theta_e, \theta_s) + g^2(\theta_e, \theta_s)$$

Méthode pour éliminer une longueur λ en facteur d'un cosinus et d'un sinus :

Isoler le cosinus et le sinus, puis diviser l'équation en sinus par celle en cosinus :

$$\begin{cases} f(\theta_e, \theta_s) + \lambda \cdot \cos(\theta_s) = 0 \\ g(\theta_e, \theta_s) + \lambda \cdot \sin(\theta_s) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda \cdot \cos(\theta_s) = -f(\theta_e, \theta_s) & (3) \\ \lambda \cdot \sin(\theta_s) = -g(\theta_e, \theta_s) & (4) \end{cases}$$

$$\frac{(4)}{(3)} \rightarrow \frac{\lambda \cdot \sin(\theta_s)}{\lambda \cdot \cos(\theta_s)} = \frac{-g(\theta_e, \theta_s)}{-f(\theta_e, \theta_s)} \rightarrow \tan(\theta_s) = \frac{g(\theta_e, \theta_s)}{f(\theta_e, \theta_s)}$$

Méthode pour déterminer un angle θ_s présent dans une équation en cosinus, sinus ou tangente :

Utiliser la fonction inverse :

$$\sin(\theta_s) = f(\theta_e) \rightarrow \theta_s = (-1)^n \arcsin(f(\theta_e)) \quad [\pi]$$

$$\cos(\theta_s) = f(\theta_e) \rightarrow \theta_s = \pm \arccos(f(\theta_e)) \quad [2\pi]$$

$$\tan(\theta_s) = f(\theta_e) \rightarrow \theta_s = \arctan(f(\theta_e)) \quad [\pi]$$

Méthode pour déterminer un angle θ_s dans une équation de la forme $A \cdot \cos(\theta_s) + B \cdot \sin(\theta_s) = C$ avec A, B et C des fonctions de θ_e :

Soit l'équation (5) : $A \cdot \cos(\theta_s) + B \cdot \sin(\theta_s) = C$

Première étape : poser l'angle φ tel que :

$$\cos(\varphi) = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad \sin(\varphi) = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad \tan(\varphi) = \frac{B}{A} \quad (\text{qui vérifie } \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1)$$

Seconde étape : diviser l'équation (5) par $\sqrt{A^2 + B^2}$ puis isoler θ_s :

$$\frac{A \cdot \cos(\theta_s)}{\sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{B \cdot \sin(\theta_s)}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \rightarrow \cos(\varphi) \cdot \cos(\theta_s) + \sin(\varphi) \cdot \sin(\theta_s) = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$\rightarrow \cos(\theta_s - \varphi) = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \rightarrow \theta_s - \varphi = \pm \arccos\left(\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right) [2\pi]$$

$$\rightarrow \theta_s = \pm \arccos\left(\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right) + \arctan\left(\frac{B}{A}\right) \quad \text{avec le arccos modulo } 2\pi \text{ et le arctan modulo } \pi$$

3.4 Linéarisation d'une loi entrée-sortie

Attention les **lois entrée-sortie** des **mécanismes en chaîne fermée** sont **très souvent non-linéaires** ! Elles ne peuvent donc pas être prise en compte directement dans une modélisation par schéma-bloc d'un SLCI (où seuls des modèles linéaires sont utilisés). **Si et seulement si, le mécanisme évolue linéairement autour d'un point de fonctionnement ou d'une plage de points** (qui constituera le domaine de validité), la loi entrée-sortie peut alors être linéarisée (puis utilisée pour les SLCI).

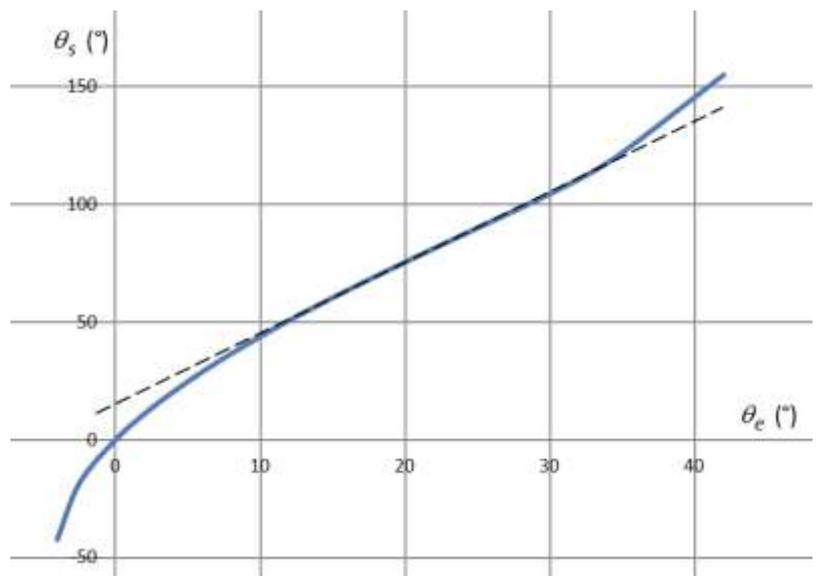
Exemple :

La loi entrée-sortie en position ci-contre peut être linéarisée pour la plage de valeurs : $10^\circ < \theta_e < 35^\circ$.

On a alors sur le domaine de validité $[10^\circ; 35^\circ]$:

$$\theta_s = a \cdot \theta_e + b \rightarrow \omega_s = a \cdot \omega_e$$

avec a et b des constantes que l'on peut déterminer graphiquement.



4. Imposer la vitesse d'un mécanisme en chaîne fermée

L'objectif de cette partie est de découvrir les démarches et les méthodes permettant d'obtenir la loi entrée-sortie en vitesse d'un mécanisme en chaîne fermée.

On appelle loi entrée-sortie en vitesse d'un mécanisme en chaîne fermée, la relation mathématique entre la dérivée temporelle du paramètre de position d'entrée, et la dérivée temporelle du paramètre de position de sortie.

Exemple du dispositif bielle-manivelle : la loi entrée-sortie en vitesse est :

$$x = f_1(\theta) \rightarrow \dot{x} = \frac{d f_1(\theta)}{dt} \quad \text{ou} \quad \theta = g_1(x) \rightarrow \dot{\theta} = \frac{d g_1(x)}{dt}$$

Remarque : quel que soit les fonctions f et g , la vitesse de sortie est toujours proportionnelle à la vitesse d'entrée. Le coefficient de proportionnalité dépend alors de la position du mécanisme. Cela implique :

$$\dot{x} = \frac{d f_1(\theta)}{dt} = \dot{\theta} \cdot f_2(\theta) \quad \text{ou} \quad \dot{\theta} = \frac{d g_1(x)}{dt} = \dot{x} \cdot g_2(x)$$

4.1 Obtention de la loi entrée-sortie en vitesse par dérivation

Méthode : dériver, par rapport au temps, la loi entrée-sortie en position précédemment obtenue.

Attention car pour alléger les écritures, on écrit rarement la variable temporelle dans les équations.

Exemple : lorsque l'on doit dériver $\sin(\theta)$, il faut déterminer :

$$\frac{d \sin(\theta(t))}{dt} = \frac{d \sin(\theta)}{dt} = \dot{\theta} \cdot \cos(\theta)$$

4.2 Obtention de la loi entrée-sortie en vitesse par fermeture géométrique en vitesse

La seconde méthode permettant de déterminer une loi entrée-sortie en vitesse est la suivante :

1. Écrire la relation de **composition des torseurs cinématiques** en parcourant la chaîne fermée :

$$\{V_{n/0}\} = \{V_{n/n-1}\} + \dots + \{V_{1/0}\}$$

On obtient **2 équations vectorielles** :

- composition des **vecteurs vitesse angulaire** ;
- composition des **vecteurs vitesse** en un point.

2. Déterminer, en fonction des **paramètres** de mouvement d'**entrée** et de **sortie** à faire apparaître, la ou les **équations scalaires** à écrire :

- équation en **vitesse angulaire** et **projection** associée ;
- équation en **vitesse linéaire**, **point** de composition et **projection** associée.

5. Imposer la vitesse d'un mécanisme potentiellement glissant

Dans de nombreux mécanismes rencontrés, on peut considérer que la zone de contact entre deux solides en liaison est suffisamment petite pour supposer qu'elle se restreint à un point. Dans cette situation, appelée contact ponctuel, la transmission de puissance mécanique possède certaines particularités lorsque l'on fait l'hypothèse de **roulement sans glissement** et de **liaison non parfaite**. Ces particularités seront traitées dans cette partie.

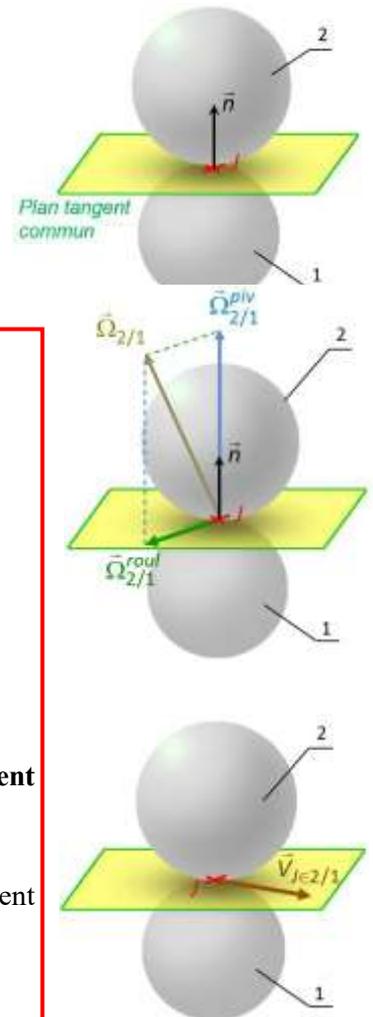


Arbre à cames dont le contact came-piston peut être perçu comme un contact ponctuel

5.1 Notion de roulement, pivotement et glissement

Lorsque deux solides 1 et 2, en mouvement l'un par rapport à l'autre, sont en **contact ponctuel** au point J , on peut définir :

- une **normale** au contact \vec{n} ;
- un **plan tangent commun** aux surfaces en contact (orthogonal à \vec{n}).



Le **torseur cinématique** de 2/1 s'écrit alors **au point J** :

$$\{V_{2/1}\} = \begin{cases} \vec{\Omega}_{2/1} \\ \vec{V}_{J \in 2/1} \end{cases} = \begin{cases} \vec{\Omega}_{2/1}^{piv} + \vec{\Omega}_{2/1}^{roul} \\ \vec{V}_{J \in 2/1} \end{cases}$$

avec $\vec{\Omega}_{2/1}^{piv}$ le **vecteur de pivotement** de 2/1 en J , **porté par la normale \vec{n}** :

$$\vec{\Omega}_{2/1}^{piv} = (\vec{\Omega}_{2/1} \cdot \vec{n}) \vec{n}$$

$\vec{\Omega}_{2/1}^{roul}$ le **vecteur de roulement** de 2/1 en J . Il est **contenu dans le plan tangent** commun à 2 et 1 ;

$\vec{V}_{J \in 2/1}$ le **vecteur vitesse de glissement** de 2/1. Il est contenu dans le plan tangent commun à 2 et 1 :

$$\vec{V}_{J \in 2/1} \cdot \vec{n} = 0$$

Pour déterminer les **vecteurs de pivotement** et de **roulement**, on détermine d'abord le **vecteur vitesse angulaire** $\vec{\Omega}_{2/1}$ des deux solides en contact ponctuel, puis on le **projette** suivant la **normale** au contact et le **plan tangent**.

Pour déterminer le **vecteur vitesse de glissement**, on utilise souvent une composition des vecteurs vitesse :

$$\vec{V}_{J \in 2/1} = \vec{V}_{J \in 2/0} + \vec{V}_{J \in 0/1} = \vec{V}_{J \in 2/0} - \vec{V}_{J \in 1/0}$$

Remarque : Dans le cas où il y a plusieurs contacts ponctuels entre deux mêmes solides, il existe autant de vecteurs de pivotement et de roulement que de contacts. Chacun d'entre eux dépend des caractéristiques du plan tangent au niveau du point de contact considéré. Dans ces situations, on utilisera une notation permettant de différencier les différents vecteurs pivotement et roulement.

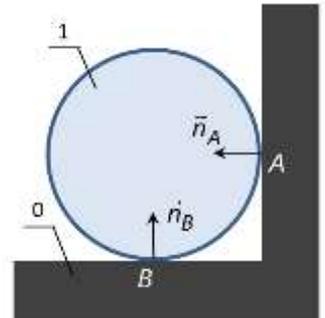
Exemple :

$$\vec{\Omega}_{1/0} = \vec{\Omega}_{1/0}^{piv_A} + \vec{\Omega}_{1/0}^{roul_A} \quad \& \quad \vec{\Omega}_{1/0} = \vec{\Omega}_{1/0}^{piv_B} + \vec{\Omega}_{1/0}^{roul_B}$$

Remarque 1 : $\vec{\Omega}_{1/0}^{piv_A} \neq \vec{\Omega}_{1/0}^{piv_B}$ et $\vec{\Omega}_{1/0}^{roul_A} \neq \vec{\Omega}_{1/0}^{roul_B}$

Remarque 2 : dans ce cas particulier où $\vec{n}_A \perp \vec{n}_B$:

$$\vec{\Omega}_{1/0}^{piv_A} = \vec{\Omega}_{1/0}^{roul_B} \quad \text{et} \quad \vec{\Omega}_{1/0}^{piv_B} = \vec{\Omega}_{1/0}^{roul_A}$$



Remarque 3 : $\vec{\Omega}_{1/0}$ est quant à lui est bien unique et indépendant du point considéré.

5.2 Résolution de la vitesse à partir de l'hypothèse de Roulement Sans Glissement (RSG)

On dira que le solide 2 roule sans glisser sur 1 en J si la vitesse de glissement est nulle :

$$\vec{V}_{J \in 2/1} = \vec{0}$$

Le phénomène de roulement sans glissement est présent lorsque l'adhérence entre les deux surfaces en contact est assurée en permanence.

Exemple du vélo de trial:

C'est l'adhérence du pneu arrière de ce vélo de trial sur la roche qui permet d'éviter à la roue de patiner lorsque le cycliste exerce un effort sur la pédale pour franchir l'obstacle.

Remarque : Ce constat permet de souligner la nécessité de s'intéresser aussi, en même temps que l'aspect cinématique, aux actions mécaniques transmises entre les deux solides en contact, en particulier lorsque les frottements ne sont pas négligeables. Ces aspects seront traités à la fin du cours de statique.



Sources

J. Le Goff, S. Génouel, « Cours de Sciences Industrielles de l'Ingénieur CPGE 1^{ère} année », Pôle Chateaubriand Joliot-Curie, 2013