

Valider les performances statiques d'un mécanisme à l'équilibre (partie 1)

PCSI 2019-2020

Table des matières

| | |
|--|-----------|
| Introduction | 2 |
| 1. Modéliser une action mécanique à l'équilibre | 3 |
| 1.1 Définition d'une action mécanique | 3 |
| 1.2 Recensement des actions mécaniques par des graphes | 3 |
| 1.3 Modélisation d'une action mécanique par le torseur | 3 |
| 1.4 Actions mécaniques usuelles..... | 5 |
| 1.5 Actions mécaniques des liaisons usuelles parfaites..... | 8 |
| 2. Déterminer les AM fournies aux effecteurs d'un mécanisme à l'équilibre | 10 |
| 2.1 Appliquer le Principe Fondamental de la Statique (PFS)..... | 10 |
| 2.2 Démarche pour une étude statique (démarche générale pour les TD)..... | 11 |
| 2.3 Stratégie d'isolement..... | 12 |
| 3. Déterminer les lois entrée-sortie en effort à l'équilibre | 13 |
| 3.1 Notion de loi entrée-sortie en effort d'un transmetteur | 13 |
| 3.2 Hypothèses utilisées | 14 |
| 3.3 Loi entrée-sortie des transmetteurs usuels..... | 14 |
| 3.4 Mesurer un couple fourni par un moteur à courant continu expérimentalement | 15 |
| Sources..... | 15 |

Introduction

Lorsque l'on conçoit un mécanisme, une étape importante nécessaire au bon fonctionnement du produit est le dimensionnement. Le dimensionnement peut se décomposer en deux parties. Il y a dans un premier temps la cinématique du mécanisme (correspondant au chap. 2 étudié cette année) et il y a aussi les efforts à transmettre par le mécanisme pour réaliser le mouvement souhaité. On parle alors d'actions mécaniques. Comme on peut le voir sur les différentes images ci-dessous, une sous-estimation des actions mécaniques peuvent amener à des détériorations importantes de systèmes :



La détermination des actions mécaniques permettra alors de :

- dimensionner les solides qui le composent et prévoir leurs déformations ;
- déterminer les équations dynamiques du mouvement ;
- déterminer les caractéristiques des actionneurs permettant de le maintenir en situation d'équilibre ;
- vérifier le maintien à l'équilibre (voir photos...).

C'est l'application du **principe fondamental de la dynamique** qui, après avoir identifié et modélisé les différentes actions mécaniques connues et recherchées, permet d'étudier la relation de cause à effet entre les mouvements (ou l'équilibre) d'un mécanisme et les actions mécaniques en présence.

1. Modéliser une action mécanique à l'équilibre

1.1 Définition d'une action mécanique

On appelle **action mécanique** (notée AM), toute cause capable de :

- provoquer ou modifier le mouvement d'un solide ;
- provoquer la déformation d'un solide.

Une action mécanique est ainsi caractérisée par son **effet**. Une AM a toujours une origine et une cible. On utilisera la notation : $i \rightarrow j$ avec i pour l'origine et j pour la cible.

Exemples avec un bateau tracté par un cerf-volant :

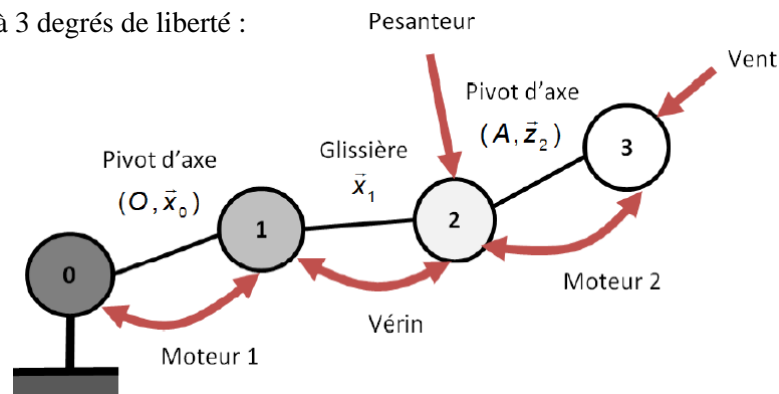
- action de la pesanteur sur le bateau : $pes \rightarrow bateau$
- action de l'eau sur le bateau : $eau \rightarrow bateau$
- action du vent sur le cerf-volant : $vent \rightarrow cerf - volant$



1.2 Recensement des actions mécaniques par des graphes

Un **graphe d'analyse** ou **graphe de structure** est un **graphe des liaisons** complété des **actions mécaniques** sollicitant le mécanisme étudié. Il permet de recenser efficacement toutes les actions mécaniques.

Exemple : chaîne ouverte à 3 degrés de liberté :



1.3 Modélisation d'une action mécanique par le torseur

Torseur des actions mécaniques :

Une action mécanique d'un solide i sur un solide j est modélisée par un torseur :

$$\{T_{i \rightarrow j}\} = \begin{cases} \vec{R}_{i \rightarrow j} \\ \vec{M}_{B, i \rightarrow j} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \vec{M}_{B, i \rightarrow j} = \vec{M}_{A, i \rightarrow j} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R}_{i \rightarrow j}$$

Avec :

- $\vec{R}_{i \rightarrow j}$ la **résultante** de l'AM de $i \rightarrow j$. Elle modélise la part de l'action mécanique qui **gène ou modifie un mouvement de translation à trajectoire rectiligne**, ou provoque une déformation de traction ou compression. Elle est en en Newton (N) et est indépendante du point d'expression du torseur ;

- $\vec{M}_{B, i \rightarrow j}$ le **moment** de l'AM de $i \rightarrow j$ au point B. Il modélise la part de l'action mécanique qui **génère ou modifie un mouvement de rotation**, ou provoque une déformation de torsion. Il est en Newton mètre (N.m) et **dépend du point d'expression du torseur**. Les moments sont reliés par une relation identique à celle reliant les vecteurs d'un champ des vitesses d'un solide indéformable.

Remarque : on utilise le terme « résultante » car le modèle résulte de la somme de toutes les AM de contact réparties au niveau du contact entre les deux solides. Dans l'exemple ci-contre, le cycliste en réalité ne pousse pas sur la pédale en un point unique mais sur toute la surface de contact entre le pied et la pédale.



Cas particulier de l'action mécanique « force » ou « torseur glisseur » :

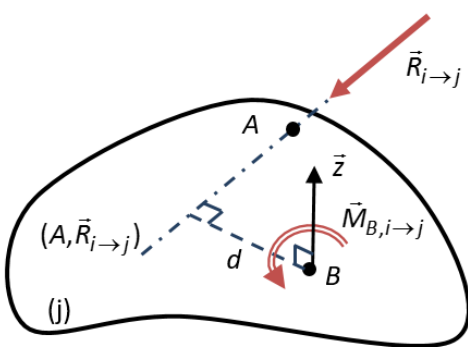
Une force appliquée en un point A est une AM dont le moment est nul au point d'application A de la force. L'AM ne tend pas à créer une rotation autour du point d'application A. Une force est modélisée par un **torseur glisseur** :

$$\{T_{i \rightarrow j}\} = \begin{cases} \vec{R}_{i \rightarrow j} \\ \vec{0} \end{cases} = \begin{cases} \vec{R}_{i \rightarrow j} \\ \neq \vec{0} \end{cases} \quad \forall P \in (A, \vec{R}_{i \rightarrow j})$$

Ce torseur est **invariant** pour tous les points $P \in (A, \vec{R}_{i \rightarrow j})$ appelée **droite d'action**. C'est la raison pour laquelle ce torseur est appelé glisseur : la force peut s'appliquer en tout point de la droite d'action en modélisant la même action.

On peut noter que le **moment** d'une force résultante est **nul** en **tout point** appartenant à la **droite d'action** de la force.

Détermination du moment d'une force en un autre point que le point d'application :



$$\vec{M}_{B, i \rightarrow j} = \vec{M}_{A, i \rightarrow j} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R}_{i \rightarrow j} = \pm d \|\vec{R}_{i \rightarrow j}\| \vec{z}$$

d est appelé **bras de levier** (distance entre B et la droite d'action)

Donc :

$$\{T_{i \rightarrow j}\} = \begin{cases} \vec{R}_{i \rightarrow j} \\ \vec{0} \end{cases} = \begin{cases} \vec{R}_{i \rightarrow j} \\ \pm d \|\vec{R}_{i \rightarrow j}\| \vec{z} \end{cases} \quad \forall P \in (A, \vec{R}_{i \rightarrow j})$$

Cas particulier de l'action mécanique « couple » ou « torseur couple » :

Un couple est une AM dont la résultante est nulle. Il est modélisé par un **torseur couple** :

$$\{T_{i \rightarrow j}\} = \begin{cases} \vec{0} \\ \vec{C} \end{cases}$$

Ce torseur est **invariant** pour tous les points P de l'espace. En effet :

$$\vec{M}_{B, i \rightarrow j} = \vec{M}_{A, i \rightarrow j} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R}_{i \rightarrow j} = \vec{M}_{A, i \rightarrow j} = \vec{C}$$

Actions mécaniques réciproques :

On admettra (de la même façon qu'en cinématique) le **théorème des actions réciproques** :

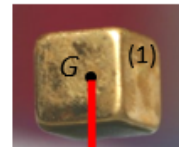
$$\{T_{i \rightarrow j}\} = -\{T_{j \rightarrow i}\}$$

Soit : $\vec{R}_{i \rightarrow j} = -\vec{R}_{j \rightarrow i}$ et $\vec{M}_{A, i \rightarrow j} = -\vec{M}_{A, j \rightarrow i}$ quel que soit A .

1.4 Actions mécaniques usuelles

Pesanteur (poids) :

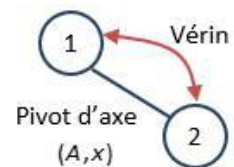
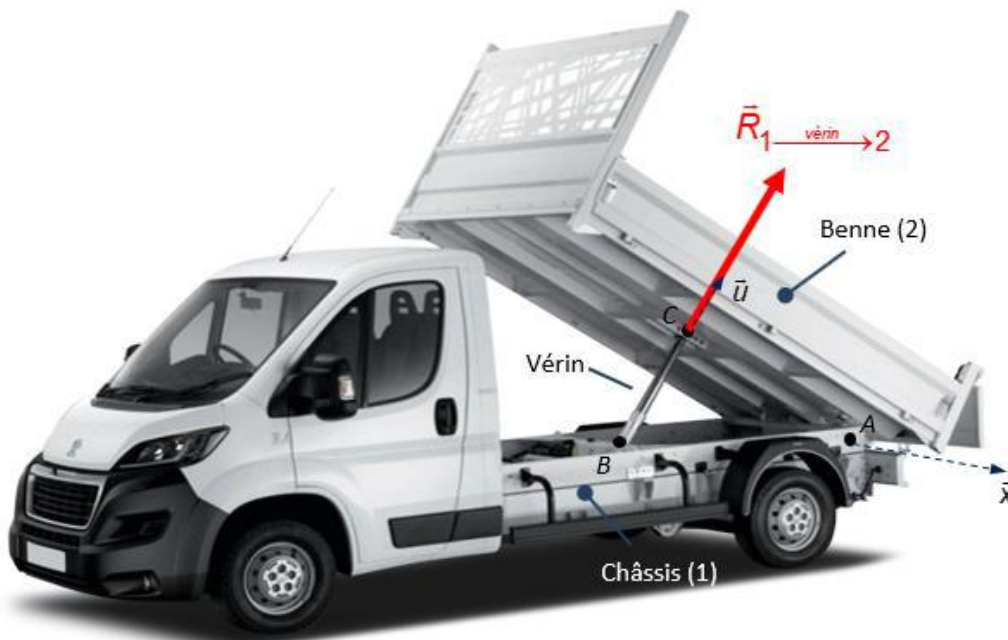
Considérons un solide 1 soumis à la pesanteur. Le **poids** d'un solide 1 de masse m est une **force de résultante** $m\vec{g}$ passant par le **centre de masse** G :



$$\{T_{pes \rightarrow 1}\} = \begin{cases} m\vec{g} \\ \vec{0} \end{cases}_{\forall P \in (G, \vec{g})} = \begin{cases} m\vec{g} \\ \neq \vec{0} \end{cases}_{\forall P \notin (G, \vec{g})}$$

Vérin :

Considérons un vérin relié à des solides 1 et 2, respectivement aux points d'attache B et C .



Si pour un vérin :

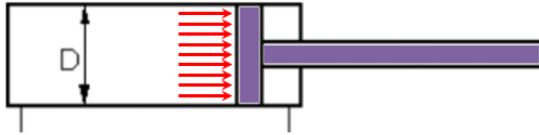
- le corps et la tige sont en **liaison articulation (pivot ou sphérique)** à leur « point d'attache B et C » ;
- et que **les poids du corps et de la tige sont négligés**,

alors le corps et la tige du vérin ne sont pas représentés sur le graphe d'analyse, et l'action du vérin est modélisée par une force de droite d'action passant par ses points d'attache :

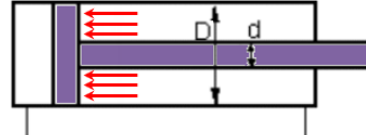
$$\{T_{1 \xrightarrow{\text{vérin}} 2}\} = \begin{cases} F_{12}\vec{u} \\ \vec{0} \end{cases}_{\forall P \in (C, \vec{u})} = \begin{cases} F_{12}\vec{u} \\ \neq \vec{0} \end{cases}_{\forall P \notin (C, \vec{u})}$$

Si en plus le vérin est de type **pneumatique ou hydraulique** et en considérant que la **pression du fluide est uniforme** :

Pression théorique dans le sens de sortie de tige



Pression théorique dans le sens de rentrée de tige



$$\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \forall P \in (C, \vec{u}) \begin{cases} p \cdot S \cdot \vec{u} \\ \vec{0} \end{cases} \text{ avec :}$$

p (en Pa) la **pression uniforme** du fluide

S (en m²) la **surface de contact fluide/piston** :

$$S = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \quad (\text{tige qui sort}) \quad \text{et} \quad S = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4} \quad (\text{tige qui rentre})$$

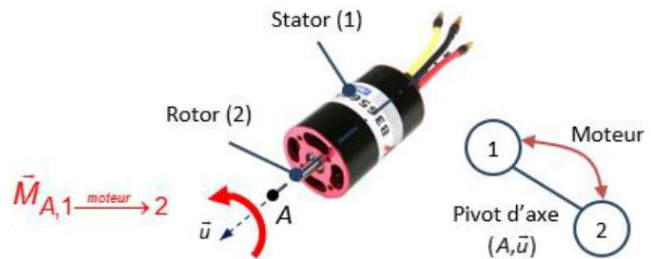
Unités de pression usuelles :

- un Pascal (Pa) est égal à un Newton par mètre carré, **1 Pa = 1 Nm⁻²**,
- un Méga Pascal (MPa) est égal à 1 Newton par millimètre carré, **1 MPa = 10⁶ Pa = 1 Nmm⁻²**;
- un bar (bar) est égal à 10⁵ Pa, **1 bar = 10⁵ Pa**.

Moteur électrique :

Considérons le rotor et le stator d'un moteur. L'action mécanique **du stator d'un moteur électrique sur son rotor** est modélisée par un **couple orienté par l'axe du moteur** :

$$\{T_{1 \xrightarrow{\text{moteur}} 2}\} = \forall P \in (A, \vec{u}) \begin{cases} \vec{0} \\ C_{12} \vec{u} \end{cases}$$

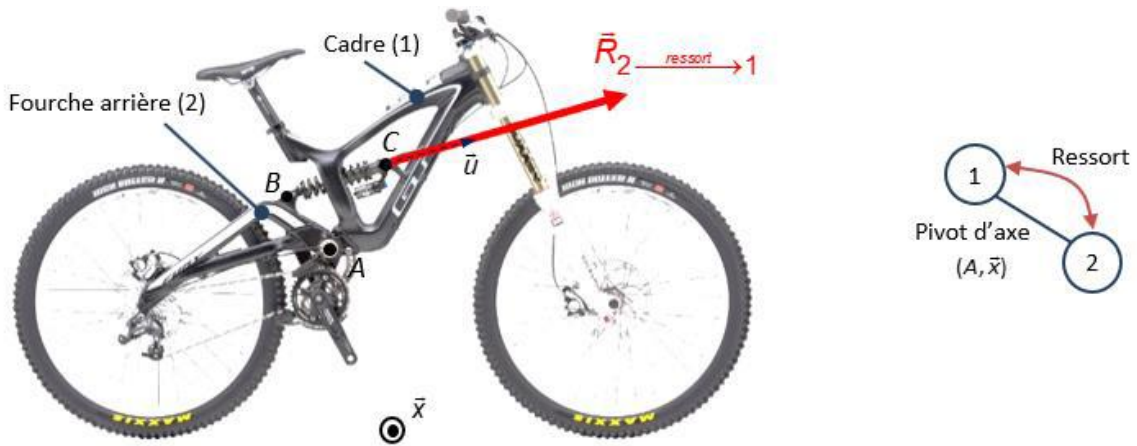


NB : le rotor est l'axe du moteur. Il est aussi en liaison pivot par rapport au stator.

Ressort de traction/compression :

Considérons deux solides 1 et 2 en liaison pivot. Un ressort de traction/compression est placé en parallèle de cette liaison. Soit λ la longueur du ressort.



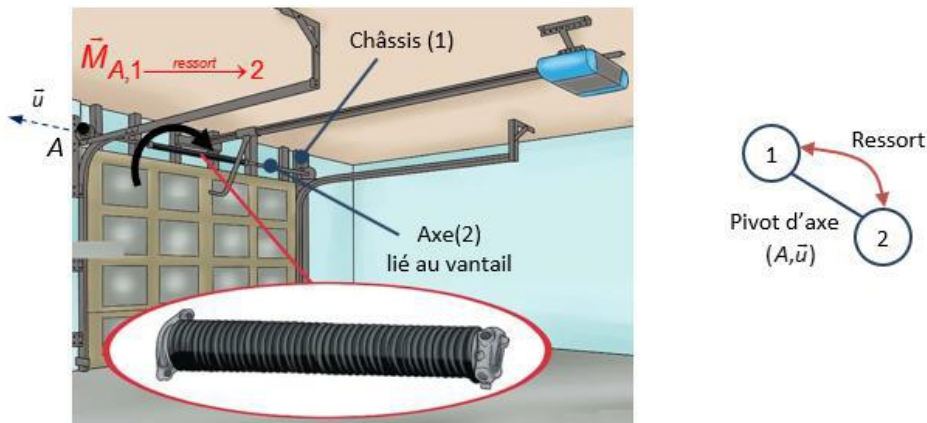


L'action d'un **ressort de traction/compression** de **longueur à vide** λ_0 et de **raideur** k (en N/m) est une **force passant par ses points d'attache** et d'intensité **proportionnelle à la variation de longueur** du ressort :

$$\left\{ T_{2 \xrightarrow{\text{ressort}} 1} \right\} = \begin{cases} -k(\lambda - \lambda_0)\vec{u} \\ \vec{0} \end{cases} \quad \forall P \in (C, \vec{u}) = \begin{cases} -k(\lambda - \lambda_0)\vec{u} \\ \neq \vec{0} \end{cases} \quad \forall P \notin (C, \vec{u})$$

Ressort de torsion :

Considérons deux solides 1 et 2 en liaison pivot. Un ressort de torsion est placé en parallèle de cette liaison. Soit α l'angle du ressort.



L'action d'un **ressort de torsion** d'angle à **vide** α_0 et de **raideur** k (en Nm/rad) est un **couple**, d'intensité **proportionnelle à la variation de l'angle** du ressort :

$$\left\{ T_{1 \xrightarrow{\text{ressort}} 2} \right\} = \begin{cases} \vec{0} \\ -k(\alpha - \alpha_0)\vec{u} \end{cases} \quad \forall P \in (A, \vec{u})$$



1.5 Actions mécaniques des liaisons usuelles parfaites

Torseur des actions mécaniques transmissibles

Une liaison entre deux solides 1 et 2 permet de contrôler les mouvements relatifs entre ces deux solides, mais aussi de transmettre des actions mécaniques d'un solide à l'autre. On note le torseur des **actions mécaniques transmissibles** dans la liaison entre 1 et 2 :

$$\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{cases} \vec{R}_{1 \rightarrow 2} \\ \vec{M}_{A, 1 \rightarrow 2} \end{cases} = \begin{cases} X_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{x} + Y_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{y} + Z_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{z} \\ L_{A, 1 \rightarrow 2} \cdot \vec{x} + M_{A, 1 \rightarrow 2} \cdot \vec{y} + N_{A, 1 \rightarrow 2} \cdot \vec{z} \end{cases}$$

Les composantes des vecteurs $\vec{R}_{1 \rightarrow 2}$ et $\vec{M}_{A, 1 \rightarrow 2}$ sont appelées **inconnues de liaisons**. En général, dans les problèmes rencontrés, elles sont inconnues et on ne cherche pas à les déterminer...

Liaisons parfaites

Une **liaison parfaite** est une liaison **cinématiquement parfaite** ne **dissipant pas d'énergie** quelques soient les efforts transmis par cette liaison et quelques soient les amplitudes et vitesses des mouvements relatifs. Cela implique :

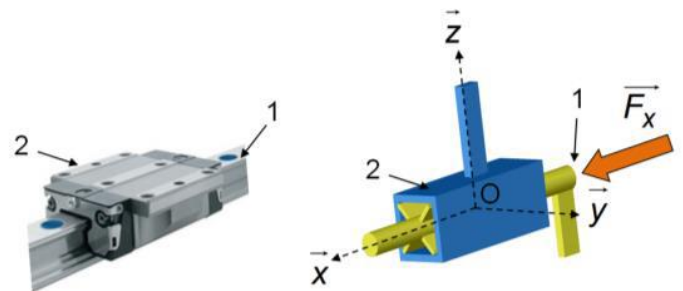
- pour chaque **degré de liberté supprimé**, il existe une **composante d'action mécanique** susceptible d'être **transmise** par la liaison ;
- à l'inverse, **aucune composante d'action mécanique ne peut être transmise** là où un **mouvement relatif est possible**.

Exemple : liaison glissière de direction \vec{x} entre 1 et 2.

La liaison comprend 1 degré de liberté : T_x

Conséquence : la liaison ne peut transmettre d'action élémentaire \vec{F}_x , d'où $X_{1 \rightarrow 2} = 0$.

Si on applique une force \vec{F}_x sur la pièce 1, la pièce 2 ne « ressent » rien, car la force n'est pas transmise d'un solide à l'autre par l'intermédiaire de la liaison. Le torseur des actions mécaniques transmissibles est de la forme :



$$\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{cases} Y_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{y} + Z_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{z} \\ L_{P, 1 \rightarrow 2} \cdot \vec{x} + M_{P, 1 \rightarrow 2} \cdot \vec{y} + N_{P, 1 \rightarrow 2} \cdot \vec{z} \end{cases}$$

Cas particulier de la liaison hélicoïdale

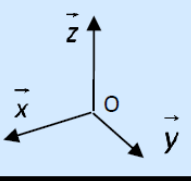
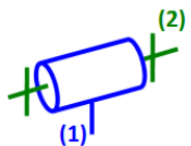
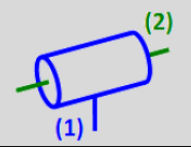
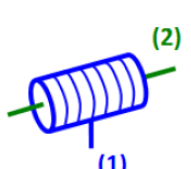
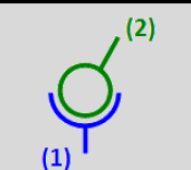
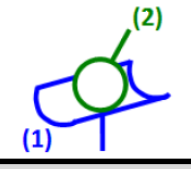
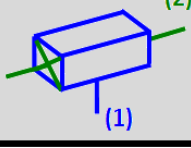
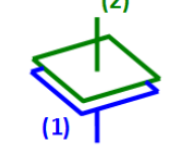
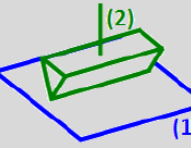
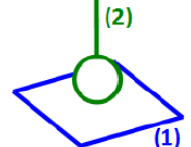
Rappel : cette liaison n'admet qu'un seul degré de liberté puisque la translation et la rotation sont liées par le pas. On cherche la forme du torseur des actions mécaniques transmissibles qui assure une puissance $P(1 \leftrightarrow 2)$ dissipée au niveau de la liaison, qui soit nulle :

$$P(1 \leftrightarrow 2) = \vec{R}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{V}_{A \in 2/1} + \vec{M}_{A, 1 \rightarrow 2} \cdot \vec{\Omega}_{2/1} = 0$$

En réalisant ce calcul, on démontre alors que :

On notera aussi que pour une liaison usuelle parfaite, la nécessité d'avoir une puissance nulle dissipée implique la particularité suivante : les **zones de validité** du torseur **cinématique** et du torseur des **actions mécaniques transmissibles** sont **identiques**.

Torseur des actions mécaniques des liaisons usuelles parfaites

| Nom et description géométrique |  | Forme du torseur cinématique | Forme du torseur des actions mécaniques transmissibles |
|--|---|---|---|
| PIVOT d'axe (O, \vec{x}) |  | $\{V_{2/1}\} = \begin{matrix} \forall A \in (O, \vec{x}) \\ \left\{ \begin{matrix} \omega_{x,2/1} \vec{x} \\ \vec{0} \end{matrix} \right. \end{matrix}$ | $\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{matrix} \forall A \in (O, \vec{x}) \\ \left\{ \begin{matrix} X_{1 \rightarrow 2} \vec{x} + Y_{1 \rightarrow 2} \vec{y} + Z_{1 \rightarrow 2} \vec{z} \\ M_{A,1 \rightarrow 2} \vec{y} + N_{A,1 \rightarrow 2} \vec{z} \end{matrix} \right. \end{matrix}$ |
| <i>Zone de validité : en tout point A appartenant à l'axe (O, \vec{x})</i> | | | |
| PIVOT GLISSANT d'axe (O, \vec{x}) |  | $\{V_{2/1}\} = \begin{matrix} \forall A \in (O, \vec{x}) \\ \left\{ \begin{matrix} \omega_{x,2/1} \vec{x} \\ v_{x,A \in 2/1} \vec{x} \end{matrix} \right. \end{matrix}$ | $\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{matrix} \forall A \in (O, \vec{x}) \\ \left\{ \begin{matrix} Y_{1 \rightarrow 2} \vec{y} + Z_{1 \rightarrow 2} \vec{z} \\ M_{A,1 \rightarrow 2} \vec{y} + N_{A,1 \rightarrow 2} \vec{z} \end{matrix} \right. \end{matrix}$ |
| <i>Zone de validité : en tout point A appartenant à l'axe (O, \vec{x})</i> | | | |
| HELICOÏDALE d'axe (O, \vec{x}) , de pas p de sens à droite / à gauche |  | $\{V_{2/1}\} = \begin{matrix} \forall A \in (O, \vec{x}) \\ \left\{ \begin{matrix} \omega_{x,2/1} \vec{x} \\ \pm \omega_{x,2/1} \frac{pas}{2\pi} \vec{x} \end{matrix} \right. \end{matrix}$ pas à droite + et pas à gauche - | $\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{matrix} \forall A \in (O, \vec{x}) \\ \left\{ \begin{matrix} X_{1 \rightarrow 2} \vec{x} + Y_{1 \rightarrow 2} \vec{y} + Z_{1 \rightarrow 2} \vec{z} \\ \mp X_{1 \rightarrow 2} \frac{pas}{2\pi} \vec{x} + M_{A,1 \rightarrow 2} \vec{y} + N_{A,1 \rightarrow 2} \vec{z} \end{matrix} \right. \end{matrix}$ pas à droite - et pas à gauche + |
| <i>Zone de validité : en tout point A appartenant à l'axe (O, \vec{x})</i> | | | |
| SPHERIQUE de centre O |  | $\{V_{2/1}\} = \begin{matrix} O \\ \left\{ \begin{matrix} \omega_{x,2/1} \vec{x} + \omega_{y,2/1} \vec{y} + \omega_{z,2/1} \vec{z} \\ \vec{0} \end{matrix} \right. \end{matrix}$ | $\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{matrix} O \\ \left\{ \begin{matrix} X_{1 \rightarrow 2} \vec{x} + Y_{1 \rightarrow 2} \vec{y} + Z_{1 \rightarrow 2} \vec{z} \\ \vec{0} \end{matrix} \right. \end{matrix}$ |
| <i>Zone de validité : uniquement au point O</i> | | | |
| SPHERE-CYLINDRE de centre O et de direction \vec{x} |  | $\{V_{2/1}\} = \begin{matrix} O \\ \left\{ \begin{matrix} \omega_{x,2/1} \vec{x} + \omega_{y,2/1} \vec{y} + \omega_{z,2/1} \vec{z} \\ v_{x,O \in 2/1} \vec{x} \end{matrix} \right. \end{matrix}$ | $\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{matrix} O \\ \left\{ \begin{matrix} Y_{1 \rightarrow 2} \vec{y} + Z_{1 \rightarrow 2} \vec{z} \\ \vec{0} \end{matrix} \right. \end{matrix}$ |
| <i>Zone de validité : uniquement au point O</i> | | | |
| GLISSIERE de direction \vec{x} |  | $\{V_{2/1}\} = \begin{matrix} \forall A \\ \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ v_{x,A \in 2/1} \vec{x} \end{matrix} \right. \end{matrix}$ | $\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{matrix} \forall A \\ \left\{ \begin{matrix} Y_{1 \rightarrow 2} \vec{y} + Z_{1 \rightarrow 2} \vec{z} \\ L_{A,1 \rightarrow 2} \vec{x} + M_{A,1 \rightarrow 2} \vec{y} + N_{A,1 \rightarrow 2} \vec{z} \end{matrix} \right. \end{matrix}$ |
| <i>Zone de validité : en tout point A</i> | | | |
| APPUI PLAN de normale \vec{z} |  | $\{V_{2/1}\} = \begin{matrix} \forall A \\ \left\{ \begin{matrix} \omega_{z,2/1} \vec{z} \\ v_{x,A \in 2/1} \vec{x} + v_{y,A \in 2/1} \vec{y} \end{matrix} \right. \end{matrix}$ | $\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{matrix} \forall A \\ \left\{ \begin{matrix} Z_{1 \rightarrow 2} \vec{z} \\ L_{A,1 \rightarrow 2} \vec{x} + M_{A,1 \rightarrow 2} \vec{y} \end{matrix} \right. \end{matrix}$ |
| <i>Zone de validité : en tout point A</i> | | | |
| CYLINDRE-PLAN de ligne de contact (O, \vec{x}) et de normale \vec{z} |  | $\{V_{2/1}\} = \begin{matrix} \forall A \in (O, \vec{x}, \vec{z}) \\ \left\{ \begin{matrix} \omega_{x,2/1} \vec{x} + \omega_{z,2/1} \vec{z} \\ v_{x,A \in 2/1} \vec{x} + v_{y,A \in 2/1} \vec{y} \end{matrix} \right. \end{matrix}$ | $\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{matrix} \forall A \in (O, \vec{x}, \vec{z}) \\ \left\{ \begin{matrix} Z_{1 \rightarrow 2} \vec{z} \\ M_{A,1 \rightarrow 2} \vec{y} \end{matrix} \right. \end{matrix}$ |
| <i>Zone de validité : en tout point A appartenant au plan (O, \vec{x}, \vec{z})</i> | | | |
| SPHERE-PLAN de point de contact O et de normale \vec{z} |  | $\{V_{2/1}\} = \begin{matrix} \forall A \in (O, \vec{z}) \\ \left\{ \begin{matrix} \omega_{x,2/1} \vec{x} + \omega_{y,2/1} \vec{y} + \omega_{z,2/1} \vec{z} \\ v_{x,A \in 2/1} \vec{x} + v_{y,A \in 2/1} \vec{y} \end{matrix} \right. \end{matrix}$ | $\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{matrix} \forall A \in (O, \vec{z}) \\ \left\{ \begin{matrix} Z_{1 \rightarrow 2} \vec{z} \\ \vec{0} \end{matrix} \right. \end{matrix}$ |
| <i>Zone de validité : en tout point A appartenant à l'axe (O, \vec{z})</i> | | | |

Après avoir exprimé ces vecteurs dans une seule et unique base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, chacune de ces équations vectorielles donne 3 équations scalaires, soit **6 équations scalaires** au total :

$$\begin{aligned} \vec{R}_{\bar{E} \rightarrow E} \cdot \vec{x} &= 0 & \vec{M}_{A, \bar{E} \rightarrow E} \cdot \vec{x} &= 0 \\ \vec{R}_{\bar{E} \rightarrow E} \cdot \vec{y} &= 0 & \vec{M}_{A, \bar{E} \rightarrow E} \cdot \vec{y} &= 0 \\ \vec{R}_{\bar{E} \rightarrow E} \cdot \vec{z} &= 0 & \vec{M}_{A, \bar{E} \rightarrow E} \cdot \vec{z} &= 0 \end{aligned}$$

2.2 Démarche pour une étude statique (démarche générale pour les TD)

Bien que chaque cas soit différent et que seule la pratique et la confrontation à des situations différentes permettent de se préparer à faire face à des problématiques inédites, on peut proposer la démarche ci-dessous.

Représenter et modéliser

- dessiner le graphe d'analyse ;
- réaliser les figures de changement de base ;
- éventuellement, représenter des forces sur le schéma cinématique.

Élaborer une stratégie d'isolement (si les isolements ne sont pas donnés...)

Après avoir identifié les actions mécaniques connues et celles recherchées, le choix des ensembles isolés diffère selon que l'étude porte sur la détermination :

- d'inconnues de liaison (voir TD 15) ;
- de loi entrée-sortie en effort d'un mécanisme en **chaîne ouverte** (voir TD 16) ;
- de loi entrée-sortie en effort d'un mécanisme en **chaîne fermée**

Appliquer le PFS, successivement, pour chaque isolement

- indiquer l'ensemble isolé (**on n'isole jamais le bâti**) ;
- faire l'inventaire des actions mécaniques extérieures, en écrivant leur torseur. (NB : tenir compte éventuellement de l'hypothèse de problème plan (sera appliqué au semestre 2)) ;
- utiliser sans démonstration les résultats concernant les solides soumis à deux glisseurs (sera appliqué au semestre 2) **OU** appliquer le théorème du moment/de la résultante ;
- exprimer, à l'aide de ou des équations obtenues, l'action mécanique recherchée en fonction de l'action mécanique connue (rappel : $\{T_{i \rightarrow j}\} = -\{T_{j \rightarrow i}\}$).

L'application du PFS doit impérativement être accompagnée d'une rédaction complète et précise.

Exemple :

- isolons l'ensemble $\{2+3\}$. L'inventaire des actions mécaniques extérieures est :

$$\begin{aligned} & - \text{l'AM du vent sur 3} : \{T_{vent \rightarrow 3}\} = \dots \\ & - \dots \end{aligned}$$

- cet ensemble de solides est à l'équilibre. Appliquons le théorème de la résultante statique : ...

ET/OU

- cet ensemble de solides est à l'équilibre. Appliquons le théorème du moment statique au point A : ...

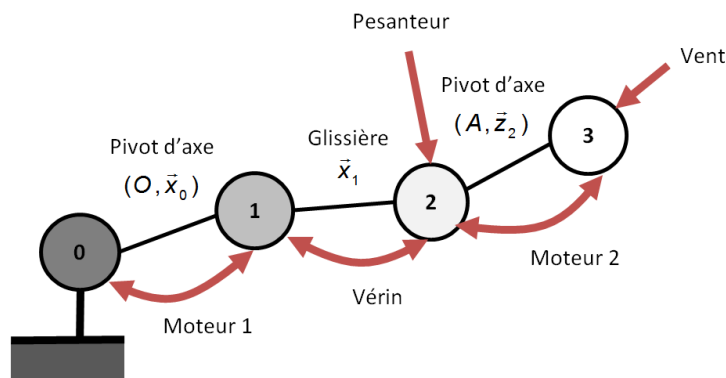
2.3 Stratégie d'isolement

Pour qu'un mécanisme en **chaîne ouverte** soit contrôlé en position, vitesse et effort, **un actionneur est généralement placé en parallèle de chaque liaison**. Il y a alors autant de chaînes d'énergie-puissance que de degrés de liberté dans les liaisons du mécanisme. Pour déterminer les **actions fournies aux effecteurs de chaque chaîne d'énergie-puissance** afin de la maintenir en équilibre dans une position imposée, il faut (à partir du graphe d'analyse et du schéma cinématique) :

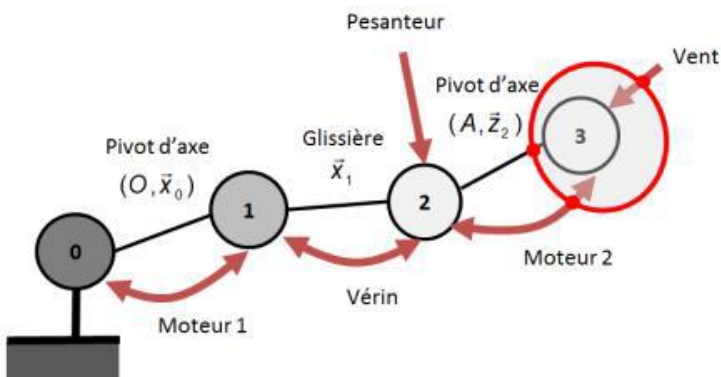
1. **isoler l'extrémité de la chaîne ouverte en conservant l'actionneur à dimensionner** comme action **extérieure**. Cela revient à choisir une **frontière d'isolement qui coupe la liaison en parallèle de l'actionneur** à dimensionner ;
2. si le degré de liberté de la **liaison en parallèle** de l'actionneur à dimensionner est :
 - une **translation à trajectoire rectiligne** : appliquer le théorème de la **résultante statique** en projection sur la **direction de la translation** ;
 - une **rotation** : appliquer le théorème du **moment statique**, en un **point de l'axe de rotation**, en projection sur la **direction de l'axe**.

Rappel : **On n'isole jamais le bâti.**

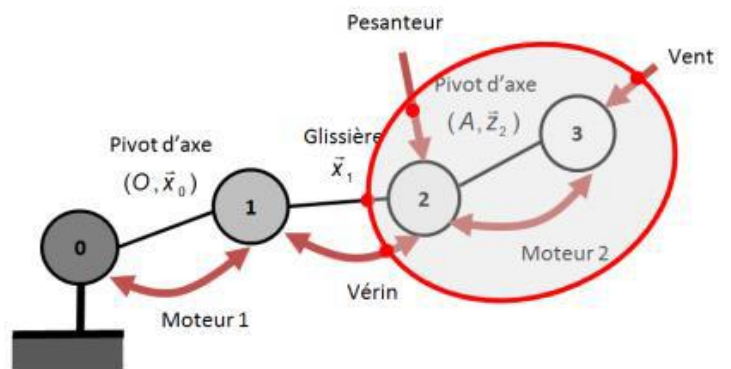
Exemple de de stratégie d'isolement : chaîne ouverte à 3 degrés de liberté



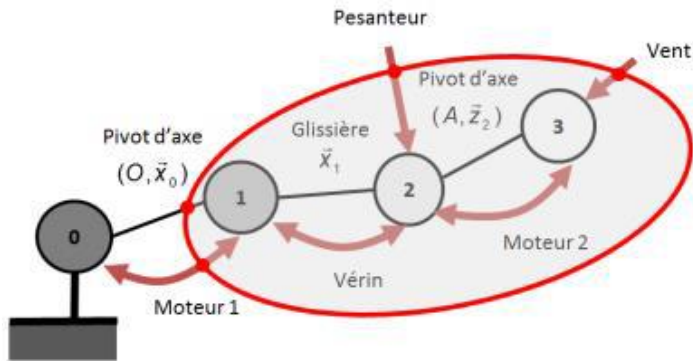
Isolement de 3 :



Isolement de 2+3 :



Isolement de 1+2+3 :

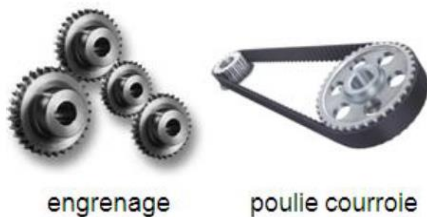
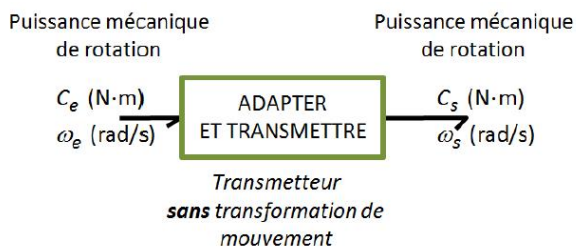


| Pour déterminer l'AM associé au : | Isolement | Théorème | Résultat |
|-----------------------------------|-----------|--|---|
| Moteur 2 | 3 | Théorème du moment statique en A sur \vec{z}_2 : $\vec{M}_{A, 2 \rightarrow 3} \cdot \vec{z}_2 = 0$ | $\vec{M}_{A, 2 \rightarrow 3} = f(\vec{R}_{vent \rightarrow 3})$ |
| Vérin | 2+3 | Théorème de la résultante statique sur \vec{x}_1 : $\vec{R}_{2+3 \rightarrow 2+3} \cdot \vec{x}_1 = 0$ | $\vec{R}_{1 \rightarrow 2} = f(\vec{R}_{vent \rightarrow 3}, \vec{R}_{pes \rightarrow 2})$ |
| Moteur 1 | 1+2+3 | Théorème du moment statique en O sur \vec{x}_0 : $\vec{M}_{O, 1+2+3 \rightarrow 1+2+3} \cdot \vec{x}_0 = 0$ | $\vec{M}_{O, 0 \rightarrow 1} = f(\vec{R}_{vent \rightarrow 3}, \vec{R}_{pes \rightarrow 2})$ |

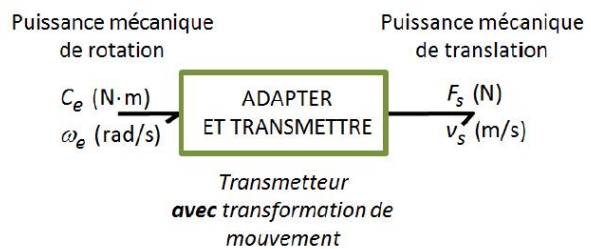
Attention, cette stratégie permet de déterminer les actions fournies aux effecteurs de chaque chaîne d'énergie. Pour déterminer les actions mécaniques fournies par les actionneurs, il faudra **prendre en compte les caractéristiques des transmetteurs**... (voir chapitre suivant sur les lois entrée-sortie en effort des transmetteurs usuels).

3. Déterminer les lois entrée-sortie en effort à l'équilibre

3.1 Notion de loi entrée-sortie en effort d'un transmetteur



Et aussi : pignon-chaîne, roue et vis sans fin...



Généralement, les transmetteurs usuels (engrenages, poulie-courroie, vis-écrou...) sont entraînés par un actionneur rotatif (moteur, ...) qui exerce un couple C_e . La pièce d'entrée du transmetteur tourne alors à la vitesse ω_e par rapport au bâti. En sortie, selon que le transmetteur ait transformé le mouvement ou pas, ce dernier exercera une force F_s ou un couple C_s . La pièce de sortie avancera à la vitesse v_s ou tournera à la vitesse ω_s par rapport au bâti.

Une **loi entrée-sortie en effort caractérise le comportement en effort** du composant de la chaîne d'énergie-puissance, elle en est le modèle en effort.

Exemples pour les transmetteurs usuels : $C_s = f(C_e)$ ou $F_s = f(C_e)$.

3.2 Hypothèses utilisées

La loi entrée-sortie en effort des transmetteurs usuels peut se déterminer rapidement à partir de leur **loi entrée-sortie cinématique, dans les conditions suivantes** :

- **fonctionnement en régime permanent**, c'est-à-dire lorsque l'actionneur tourne à vitesse constante ;
- **liaisons parfaites** entre les pièces qui constituent le transmetteur, pas de phénomènes dissipatifs (frottement sec ou visqueux) ;
- **action de la pesanteur** sur les pièces qui constituent le transmetteur, et **action interne de ressorts... négligeables** devant les autres actions mécaniques mises en jeu.

Si et seulement si ces conditions sont remplies, on peut alors faire comme première approximation que la puissance est intégralement transmise entre l'entrée et la sortie du transmetteur :

Rappel : $|P| = |C \cdot \omega|$ pour un mouvement de rotation

$|P| = |F \cdot v|$ pour un mouvement de translation

On admettra que les lois entrée-sortie en effort page suivante, établies avec les hypothèses précédentes (fonctionnement en régime permanent, liaisons parfaites, et actions de pesanteur et interne négligeables) sont valables également, lorsque le mécanisme étudié est à l'équilibre.

3.3 Loi entrée-sortie des transmetteurs usuels

Loi entrée sortie des train d'engrenages, poulie-courroie et pignon-chaîne

Rappel loi entrée-sortie cinématique : $\left| \frac{\omega_s}{\omega_e} \right| = i \rightarrow |\omega_s| = i \cdot |\omega_e|$

Avec i qui est fonction des diamètres ou nombre de dents ou filets des différents pignons et roues (selon la valeur de $i < 1$ ou > 1 , on parle de **réducteur** ou de **multiplicateur de vitesse**).

Loi entrée-sortie en effort avec les hypothèses précédentes :

$$|C_s| = \frac{1}{i} |C_e|$$

Ainsi, un **réducteur de vitesse est un multiplicateur de couple**, et un **multiplicateur de vitesse est un réducteur de couple** (se retrouve en résonnant à puissance constante).

Loi entrée sortie des transmetteurs à transformation de mouvement (pignon-crémaillère, poulie-courroie, pignon-chaîne)

Rappel loi entrée-sortie cinématique :

$$\begin{cases} 2\pi \text{ (rad)} \rightarrow 2\pi R \text{ (m)} \\ |\theta| \text{ (rad)} \rightarrow |x| \text{ (m)} \end{cases} \rightarrow |x| = \frac{2\pi R}{2\pi} |\theta| \rightarrow |V_s| = R|\omega_e|$$

avec $R = D/2 = m \cdot Z/2$ le rayon, Z le nombre de dents, et m module du pignon

Loi entrée-sortie en effort avec les hypothèses précédentes :

$$|F_s| = \frac{1}{R} |C_e|$$

Cas particulier des transmetteurs vis-écrou

Rappel loi entrée-sortie cinématique :

$$\begin{cases} 2\pi \text{ (rad)} \rightarrow pas \text{ (m)} \\ |\theta| \text{ (rad)} \rightarrow |x| \text{ (m)} \end{cases} \rightarrow |x| = \frac{pas}{2\pi} |\theta| \rightarrow |V_s| = \frac{pas}{2\pi} |\omega_e|$$

avec pas le pas de la vis et de l'écrou

Loi entrée-sortie en effort avec les hypothèses précédentes :

$$|F_s| = \frac{2\pi}{pas} |C_e|$$

3.4 Mesurer un couple fourni par un moteur à courant continu expérimentalement

Pour rappel, une des équations modélisant le comportement d'un moteur à courant continu est :

$$c_m(t) = K_c \cdot i(t)$$

avec $c_m(t)$ le couple exercé par le moteur (N.m) et $i(t)$ le courant consommé (A).

Le couple moteur est donc proportionnel au courant qui passe dans le rotor. Ainsi, en mesurant $i(t)$ et en connaissant la constante de couple K_c ((N.m)/A) fourni dans la documentation du constructeur du moteur, il est possible de déterminer $c_m(t)$.

Sources

J. Le Goff, S. Génouel, « Cours de Sciences Industrielles de l'Ingénieur CPGE 1^{ère} année », Pôle Chateaubriand Joliot-Curie, 2013