

# Valider les performances statiques d'un mécanisme à l'équilibre (partie 2)

PCSI 2019-2020

## Table des matières

1.	Déterminer les actions d'un mécanisme en chaîne fermée à l'équilibre.....	2
1.1	Théorème d'un solide soumis à 2 actions mécaniques modélisables par des forces.....	2
1.2	Stratégie d'isolement .....	3
2.	Déterminer les actions d'un mécanisme en chaîne fermée à l'équilibre d'un problème plan.....	4
2.1	Modéliser les actions mécaniques dans le cas d'un problème plan .....	4
2.2	Simplification de certaines liaisons modélisables par des forces.....	6
3.	Modéliser les actions de contact ponctuel NON parfait .....	6
3.1	Modélisation des AM transmissibles dans une liaison sphère-plan parfaite.....	6
3.2	Modélisation des AM transmissibles dans une liaison sphère-plan avec prise en compte de la résistance au glissement : Modèle de Coulomb .....	6
3.3	Modélisation des AM transmissibles dans une liaison sphère-plan avec prise en compte des résistances au roulement et au pivotement .....	10
4.	Modéliser localement les actions mécaniques .....	11
4.1	Action mécanique à distance et de contact .....	11
4.2	Modèle locale d'une action mécanique à distance.....	11
4.3	Modèle locale d'une action mécanique de contact linéique ou surfacique .....	11
4.4	Relation entre le modèle local et le modèle global.....	12
	Sources .....	12

# 1. Déterminer les actions d'un mécanisme en chaîne fermée à l'équilibre

## 1.1 Théorème d'un solide soumis à 2 actions mécaniques modélisables par des forces

Si un solide  $S$  à l'équilibre, est soumis à deux actions mécaniques modélisées par des forces (torseurs glisseurs) :

$$\{T_{1 \rightarrow S}\} = \begin{cases} \vec{F}_1 \\ \vec{0} \end{cases} \quad \text{et} \quad \{T_{2 \rightarrow S}\} = \begin{cases} \vec{F}_2 \\ \vec{0} \end{cases} . \text{ Alors :}$$

Le théorème de la résultante statique  $\Rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0} \Rightarrow$  résultantes opposés.

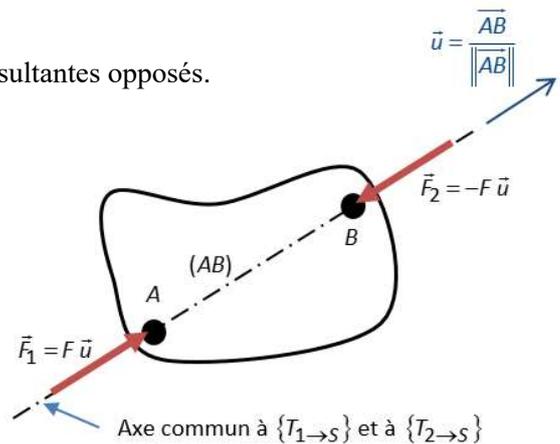
Le théorème du moment statique en A :

$$\Rightarrow \vec{M}_{A,1 \rightarrow S} + \vec{M}_{A,2 \rightarrow S} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{M}_{B,2 \rightarrow S} + \overline{AB} \wedge \vec{F}_2 = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \overline{AB} \wedge \vec{F}_2 = \vec{0}$$

$\Rightarrow$  les vecteurs  $\overline{AB}$  et  $\vec{F}_2$  sont colinéaires.



Ainsi, si un solide  $S$  est en **équilibre** soumis à **deux forces (torseurs glisseurs)** alors :

- les **résultantes** sont **opposées** (même direction, même norme, sens contraire) ;
- les **droites d'action** sont **identiques** et **passent par les points d'application**.

Ces résultats permettent de réduire le nombre d'inconnues d'actions mécaniques de liaison : si l'on note  $\vec{u}$  le vecteur unitaire de la droite d'action  $\overline{AB}$ , alors il ne subsiste qu'une **seule inconnue**, l'intensité des résultantes :

$$\{T_{1 \rightarrow S}\} = -\{T_{2 \rightarrow S}\} = \forall P \in (A, \vec{u}) \begin{cases} F \cdot \vec{u} \\ \vec{0} \end{cases}$$

Remarque : les actions mécaniques transmissibles dans les liaisons **sphérique**, **sphère-cylindre** et **sphère-plan** sont modélisables par des forces (torseur glisseur).

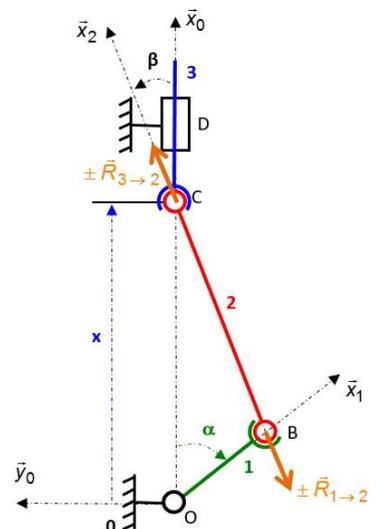
**Exemple** : transmetteur bielle-manivelle

En négligeant l'action de la pesanteur, l'isolement de la bielle 2 conduit à l'inventaire des actions mécaniques extérieures suivant :

- **liaison sphérique parfaite** :  $\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{cases} X_{12} \cdot \vec{x}_2 + Y_{12} \cdot \vec{y}_2 + Z_{12} \cdot \vec{z}_2 \\ \vec{0} \end{cases}$

- **liaison sphérique parfaite** :  $\{T_{3 \rightarrow 2}\} = \begin{cases} X_{32} \cdot \vec{x}_2 + Y_{32} \cdot \vec{y}_2 + Z_{32} \cdot \vec{z}_2 \\ \vec{0} \end{cases}$

La bielle 2 étant soumise à deux actions mécaniques modélisables par des torseurs glisseurs, on en déduit que :



$$\{T_{1 \rightarrow 2}\} = -\{T_{3 \rightarrow 2}\} = \begin{cases} X_{12} \cdot \vec{x}_2 \\ \vec{0} \end{cases} \quad \forall P \in (B, \vec{x}_2)$$

Cette réduction du nombre d'inconnues d'actions mécaniques de liaison facilite ensuite la détermination de la relation entre l'effort à fournir par le moteur sur 1 pour maintenir le mécanisme à l'équilibre et les différentes sollicitations sur 3.

### 1.2 Stratégie d'isolement

Pour qu'un mécanisme en **chaîne fermée** soit contrôlé en position, vitesse et effort, **un seul actionneur est généralement suffisant**. Il y a alors une seule chaîne d'énergie-puissance.

Pour déterminer l'action fournie à l'effecteur de cette chaîne d'énergie-puissance afin de la maintenir en équilibre dans une position imposée, il faut à partir du graphe d'analyse et du schéma cinématique :

1/ **identifier les solides** ou ensembles de solides **soumis à 2 glisseurs** et utiliser, sans démonstration, les résultats du cours (vu partie 1.1) afin de déterminer les **directions des résultantes** de ces glisseurs et ainsi réduire le nombre d'inconnues d'actions mécaniques de liaison. **Représenter ces résultantes** sur le **schéma cinématique** ;

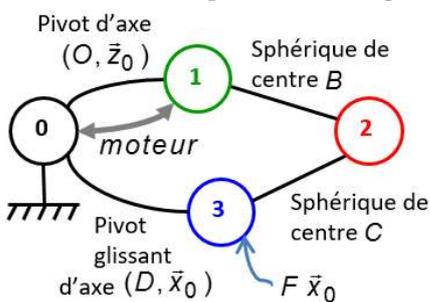
2/ **isoler, solide après solide**, en partant d'un isolement qui fait intervenir l'action de l'actionneur jusqu'à un isolement qui fait intervenir l'action mécanique « de sortie ».

Pour les **solides soumis à 2 glisseurs**, utiliser, sans démonstration, les résultats du cours (vu partie 1.1).

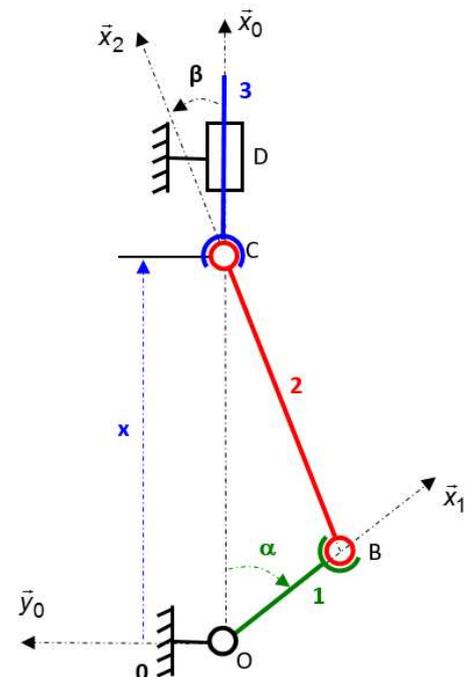
Pour les autres isolements, si le degré de liberté de la **liaison à supprimer** est :

- une **translation à trajectoire rectiligne** : appliquer le théorème de la **résultante statique** en projection sur la **direction de la translation**,
- une **rotation** : appliquer le théorème du **moment statique**, en un **point de l'axe de rotation**, en projection sur la **direction de l'axe** (rappel : **on n'isole jamais le bâti**).

**Exemple de de stratégie d'isolement** : transmetteur bielle-manivelle



Si l'objectif est de déterminer une relation entre l'effort  $F$  sur le piston 3 et le couple  $C_{01}$  du moteur entre 0 et 1, la stratégie d'isolement est la suivante :



Etape	Isolement	Théorème	Résultat
1	2	PFS sur un solide soumis à 2 glisseurs	$\vec{R}_{1 \rightarrow 2}$ et $\vec{R}_{3 \rightarrow 2}$ suivant $(B, \vec{x}_2)$
2	1	PFS en moment au point O suivant $\vec{z}_0$ : $\vec{M}_O, \vec{1} \rightarrow \vec{1} \cdot \vec{z}_0 = 0$	$\vec{R}_{2 \rightarrow 1} = f(C_{01}) \cdot \vec{z}_0$
3	2	PFS sur un solide soumis à 2 glisseurs	$\vec{R}_{3 \rightarrow 2} = -\vec{R}_{1 \rightarrow 2}$
4	3	PFS en résultante suivant $\vec{x}_0$ : $\vec{R}_{3 \rightarrow 3} \cdot \vec{x}_0 = 0$	$F \cdot \vec{x}_0 = g(\vec{R}_{3 \rightarrow 2})$ $= h(C_{01}) \cdot \vec{x}_0$

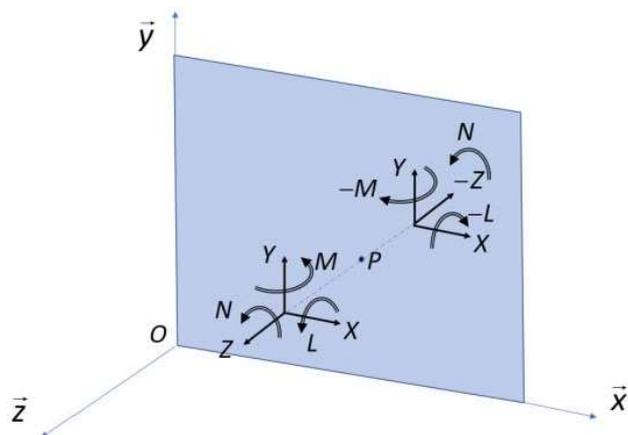
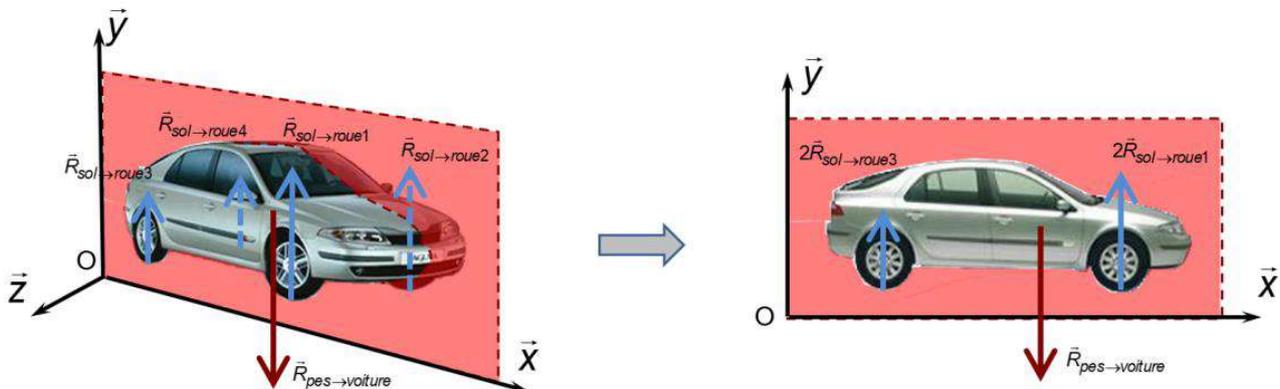
## 2. Déterminer les actions d'un mécanisme en chaîne fermée à l'équilibre d'un problème plan

### 2.1 Modéliser les actions mécaniques dans le cas d'un problème plan

On peut admettre que l'on est face à un problème dit **plan** si :

- la **géométrie des liaisons** du mécanisme présente un **plan de symétrie** ;
- les **actions mécaniques extérieures** exercées sur ce mécanisme sont **symétriques par rapport à ce plan**. C'est à dire que :
  - les résultantes extérieures sont contenues dans le plan de symétrie ;
  - les moments extérieures sont perpendiculaires au plan de symétrie.

**Exemple** : hypothèse problème plan  $(O, \vec{x}, \vec{y})$



Dans ce cas, les **composantes** qui correspondent à des **actions mécaniques susceptibles de faire sortir les solides du plan** sont **nulles**.

On obtient alors ainsi :

Problème plan $(O, \vec{x}, \vec{y})$	$\{T_{i \rightarrow j}\} = \begin{cases} X_{ij} \cdot \vec{x} + Y_{ij} \cdot \vec{y} + \cancel{Z_{ij} \cdot \vec{z}} \\ L_{A, i \rightarrow j} \cdot \vec{x} + M_{A, i \rightarrow j} \cdot \vec{y} + N_{A, i \rightarrow j} \cdot \vec{z} \end{cases} = \begin{cases} X_{ij} \cdot \vec{x} + Y_{ij} \cdot \vec{y} \\ N_{A, i \rightarrow j} \cdot \vec{z} \end{cases} \quad \forall A \in (O, \vec{x}, \vec{y})$
Problème plan $(O, \vec{y}, \vec{z})$	$\{T_{i \rightarrow j}\} = \begin{cases} \cancel{X_{ij} \cdot \vec{x}} + Y_{ij} \cdot \vec{y} + Z_{ij} \cdot \vec{z} \\ L_{A, i \rightarrow j} \cdot \vec{x} + M_{A, i \rightarrow j} \cdot \vec{y} + N_{A, i \rightarrow j} \cdot \vec{z} \end{cases} = \begin{cases} Y_{ij} \cdot \vec{y} + Z_{ij} \cdot \vec{z} \\ L_{A, i \rightarrow j} \cdot \vec{x} \end{cases} \quad \forall A \in (O, \vec{y}, \vec{z})$
Problème plan $(O, \vec{x}, \vec{z})$	$\{T_{i \rightarrow j}\} = \begin{cases} X_{ij} \cdot \vec{x} + \cancel{Y_{ij} \cdot \vec{y}} + Z_{ij} \cdot \vec{z} \\ L_{A, i \rightarrow j} \cdot \vec{x} + M_{A, i \rightarrow j} \cdot \vec{y} + N_{A, i \rightarrow j} \cdot \vec{z} \end{cases} = \begin{cases} X_{ij} \cdot \vec{x} + Z_{ij} \cdot \vec{z} \\ M_{A, i \rightarrow j} \cdot \vec{y} \end{cases} \quad \forall A \in (O, \vec{x}, \vec{z})$

L'hypothèse de problème plan, permet de simplifier l'écriture des torseurs et d'alléger la mise en œuvre du principe fondamental de la statique. **Seules 3 équations scalaires seront issues du PFS (au lieu de 6) : 2 pour les résultantes et 1 pour le moment.**

**Exemple : prothèse transtibiale**

Le torseur des actions mécaniques transmissibles dans la liaison **glissière de direction**  $\vec{y}_3$  entre 3<sub>1</sub> et 3<sub>2</sub> s'écrit :

$$\{T_{3_1 \rightarrow 3_2}\} = \begin{cases} X_{3_1 \rightarrow 3_2} \cdot \vec{x}_3 + Z_{3_1 \rightarrow 3_2} \cdot \vec{z}_3 \\ \forall P \left( L_{P, 3_1 \rightarrow 3_2} \cdot \vec{x}_3 + M_{P, 3_1 \rightarrow 3_2} \cdot \vec{y}_3 + N_{P, 3_1 \rightarrow 3_2} \cdot \vec{z}_3 \right) \end{cases}$$

Et avec une hypothèse de problème plan  $(O, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$

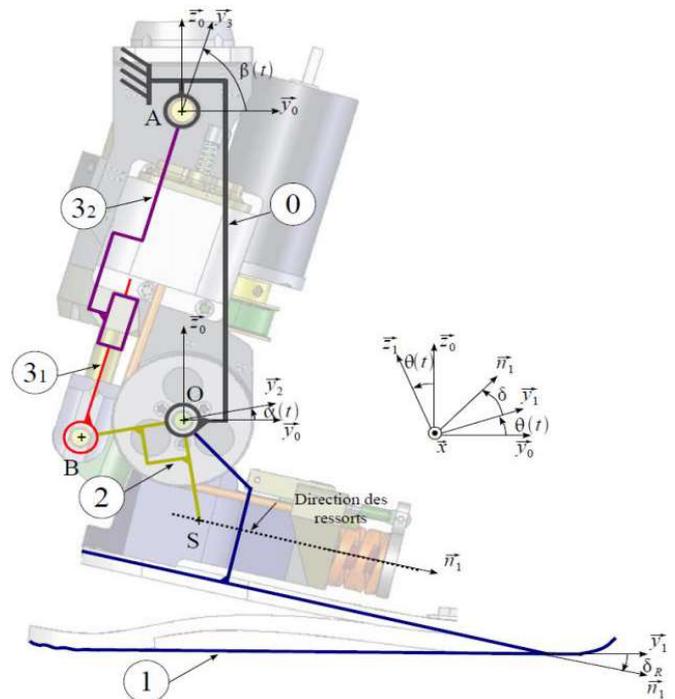
$$\{T_{3_1 \rightarrow 3_2}\} = \begin{cases} Z_{3_1 \rightarrow 3_2} \cdot \vec{z}_3 \\ \forall P \in (O, \vec{y}_i, \vec{z}_i) \left( L_{P, 3_1 \rightarrow 3_2} \cdot \vec{x}_3 \right) \end{cases}$$

Le torseur des actions mécaniques transmissibles dans la liaison **pivot d'axe**  $(O, \vec{x})$  entre 1 et 0 s'écrit :

$$\{T_{0 \rightarrow 1}\} = \begin{cases} X_{0 \rightarrow 1} \cdot \vec{x} + Y_{0 \rightarrow 1} \cdot \vec{y} + Z_{0 \rightarrow 1} \cdot \vec{z} \\ \forall P \in (O, \vec{x}) \left( M_{O, 0 \rightarrow 1} \cdot \vec{y} + N_{O, 0 \rightarrow 1} \cdot \vec{z} \right) \end{cases}$$

Et avec une hypothèse de problème plan  $(O, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$

$$\{T_{0 \rightarrow 1}\} = \begin{cases} Y_{0 \rightarrow 1} \cdot \vec{y} + Z_{0 \rightarrow 1} \cdot \vec{z} \\ \vec{0} \end{cases}$$



Remarque : Le **domaine de validité de la forme du torseur** est l'**intersection entre le plan et le domaine de validité initial.**

En général, il est mentionné dans l'énoncé d'un problème que l'on est face à un problème plan. Mais il faut être capable de simplifier les torseurs d'AM en annulant certaines composantes de leurs éléments de réduction... tout en faisant attention au domaine de validité.

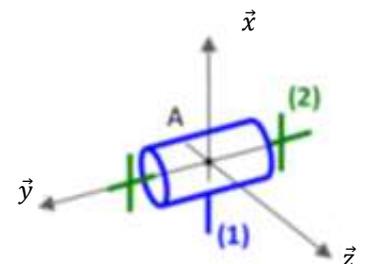
**Autres exemples :**

Le torseur des actions mécaniques transmissibles dans la liaison **pivot d'axe**  $(A, \vec{y})$  entre 2 et 1 s'écrit :

$$\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{cases} X_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{x} + Y_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{y} + Z_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{z} \\ \forall P \in (A, \vec{y}) \left( L_{A, 1 \rightarrow 2} \cdot \vec{x} + N_{A, 1 \rightarrow 2} \cdot \vec{z} \right) \end{cases}$$

Et avec une hypothèse de problème plan  $(O, \vec{y}, \vec{z})$

$$\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{cases} Y_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{y} + Z_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{z} \\ \forall P \in (A, \vec{y}) \left( L_{A, 1 \rightarrow 2} \cdot \vec{x} \right) \end{cases}$$



Remarque : La liaison pivot est devenue dans ce plan une liaison encastrement

### 2.2 Simplification de certaines liaisons modélisables par des forces

Rappel : les actions mécaniques transmissibles dans les liaisons **sphérique**, **sphère-cylindre** et **sphère-plan** sont toujours modélisables par des forces (torseur glisseur).

Avec l'**hypothèse problème plan**, il faut y rajouter les liaisons **pivot** et **pivot glissant** dont l'axe est **perpendiculaire au plan**, et les liaisons **cylindre-plan de ligne de contact perpendiculaire au plan** (se vérifie facilement en écrivant les différents torseurs).

### 3. Modéliser les actions de contact ponctuel NON parfait

Les phénomènes de frottement et d'adhérence sont omniprésents dans l'étude du comportement et la conception des mécanismes. Ils peuvent être :

- **utiles** lorsqu'il s'agit de freiner ou d'accélérer un solide ;
- **néfastes** lorsqu'ils sont à l'origine de pertes d'énergie ou d'usures trop importantes ;
- **négligés** dans de nombreuses études.

#### Exemple de cas d'adhérence utile :

C'est l'adhérence du pneu arrière de ce vélo de trial sur la roche qui permet d'éviter à la roue de patiner lorsque le cycliste exerce un effort sur la pédale pour franchir l'obstacle.

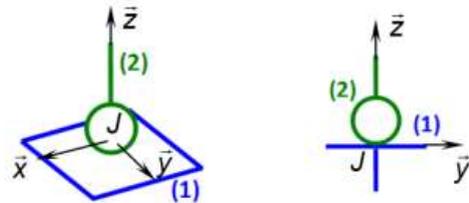
Ce constat permet de souligner la nécessité de s'intéresser aussi, en même temps que l'aspect cinématique, aux actions mécaniques transmises entre les deux solides en contact, en particulier lorsque les frottements ne sont pas négligeables.



#### 3.1 Modélisation des AM transmissibles dans une liaison sphère-plan parfaite

On rappelle la forme du torseur des actions mécaniques transmissibles dans le cas d'une **liaison sphère-plan parfaite de contact J et de normale  $\vec{z}$**  :

$$\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \underset{\forall P \in (J, \vec{z})}{\begin{cases} \vec{N}_{1 \rightarrow 2} \\ \vec{0} \end{cases}} = \underset{\forall P \in (J, \vec{z})}{\begin{cases} Z_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{z} \\ \vec{0} \end{cases}}$$



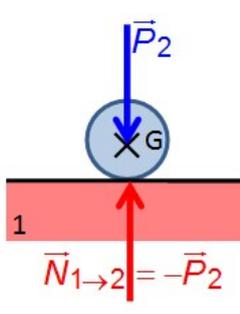
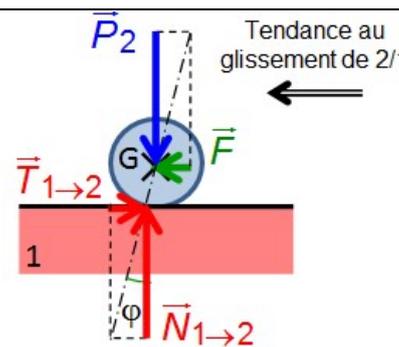
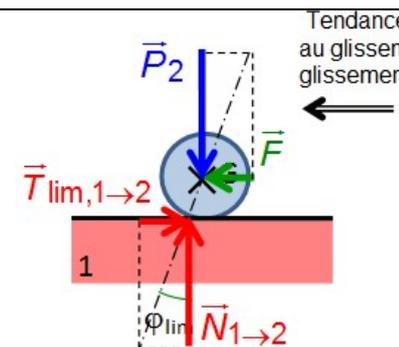
#### 3.2 Modélisation des AM transmissibles dans une liaison sphère-plan avec prise en compte de la résistance au glissement : Modèle de Coulomb

##### Phénomènes d'adhérence et de glissement avec frottement :

Lors de la prise en compte de ces phénomènes, on différencie deux cas :

<b>GLISSEMENT avec FROTTEMENT</b> entre deux solides en contact	Il existe un <b>mouvement relatif</b> entre les 2 solides
<b>ADHERENCE</b> entre deux solides en contact	Il existe une <b>tendance au mouvement</b> , mais il n'y a <b>pas de mouvement relatif</b> entre les 2 solides.

Prenons l'exemple d'un solide 2 en contact ponctuel avec un plan horizontal 1 et sur lequel on applique une force  $\vec{F}$  de norme de plus en plus importante avec  $\vec{F}$  comme objectif de le faire glisser sur le plan. On différencie trois situations :

$\vec{F} = \vec{0}$	$\vec{F} \nearrow$	$\vec{F} \nearrow \nearrow$
<b>REPOS</b>	<b>ADHERENCE avec tendance au glissement</b>	<b>ADHERENCE limite puis GLISSEMENT avec FROTTEMENT</b>
La boule 2 est au repos	Une action mécanique extérieure $\vec{F}$ agit sur 2 et tend à le faire glisser par rapport à 1	2 est à la limite de glisser, ou se met à glisser par rapport au plan dans le même sens que $\vec{F}$ .
		
L'action normale $\vec{N}_{1 \rightarrow 2}$ de contact de 1 sur 2 s'oppose au poids $P_2$ de 2	<p>Il existe une action tangentielle <math>\vec{T}_{1 \rightarrow 2}</math> de 1 sur 2 qui s'oppose à la tendance au glissement <b>ou</b> au glissement relatif entre 2 et 1.</p> <p>La résultante <math>\vec{R}_{1 \rightarrow 2} = \vec{N}_{1 \rightarrow 2} + \vec{T}_{1 \rightarrow 2}</math> est inclinée d'un angle <math>\varphi</math> par rapport à la normale.</p> <p>L'action tangentielle a une limite <math>\vec{T}_{lim}</math> à partir de laquelle l'opposition à la tendance au glissement ne sera plus suffisante pour maintenir 2 immobile par rapport au plan 1, ce qui implique qu'il existe un angle limite d'inclinaison <math>\varphi_{lim}</math>.</p>	
	$\ \vec{T}_{1 \rightarrow 2}\  = \ \vec{F}\  < \ \vec{T}_{lim}\ $	$\ \vec{T}_{1 \rightarrow 2}\  = \ \vec{T}_{lim}\  \leq \ \vec{F}\ $

**Modélisation de la résistance au glissement : Modèle de Coulomb)**

Afin de prendre en compte les phénomènes d'adhérence ou de frottement, en particulier lors de l'inventaire des actions mécaniques appliquées à un ensemble isolé, on utilise le modèle de Coulomb.

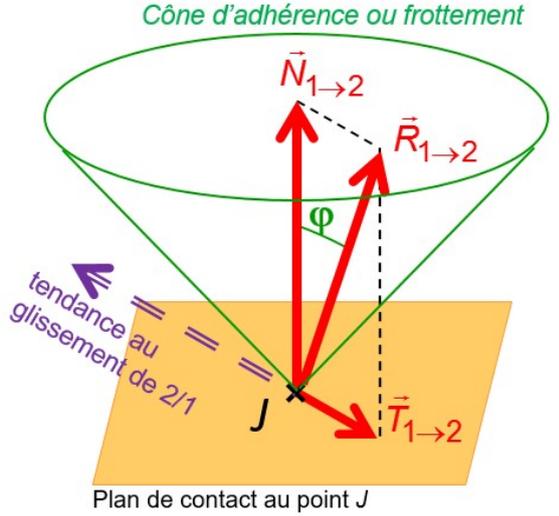
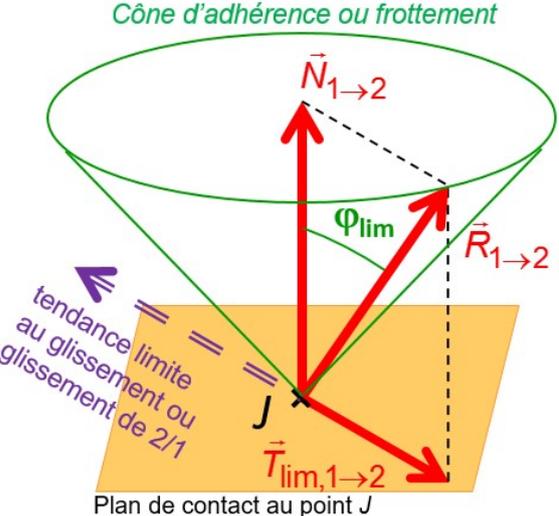
Soient deux solides 1 et 2 en contact ponctuel au point  $J$  et ayant une tendance au glissement ou un glissement relatif.

La résultante de l'action mécanique de 1 sur 2 au point  $J$  s'écrit  $\vec{R}_{1 \rightarrow 2} = \vec{N}_{1 \rightarrow 2} + \vec{T}_{1 \rightarrow 2}$  avec :

- $\vec{N}_{1 \rightarrow 2}$  la **composante normale** de l'effort de contact de 1 sur 2 ;
- $\vec{T}_{1 \rightarrow 2}$  la **composante tangentielle** de l'effort de contact de 1 sur 2. C'est cette composante qui modélise la **résistance au glissement**.

On a alors :  $\|\vec{T}_{1 \rightarrow 2}\| \leq \mu \cdot \|\vec{N}_{1 \rightarrow 2}\|$  avec  $\mu$  le **coefficient d'adhérence** ou **de frottement** (sans dimension).

On peut représenter graphiquement ce modèle en étudiant la place de la résultante  $\vec{R}_{1 \rightarrow 2} = \vec{N}_{1 \rightarrow 2} + \vec{T}_{1 \rightarrow 2}$ , inclinée d'un angle  $\varphi$  par rapport à la normale dans le cône de frottement (ou d'adhérence) de demi-angle au sommet  $\varphi_{lim}$ .

<p align="center"><b>ADHERENCE</b> avec tendance au glissement</p>	<p align="center"><b>ADHERENCE limite puis</b> <b>GLISSEMENT avec FROTTEMENT</b></p>
 <p align="center">Plan de contact au point J</p>	 <p align="center">Plan de contact au point J</p>
<p><math>\varphi</math> (angle d'adhérence) représente l'inclinaison de <math>\vec{R}_{1 \rightarrow 2}</math> par rapport à la normale au contact</p>	<p><math>\varphi = \varphi_{lim}</math> (angle d'adhérence limite)  <math>\ \vec{T}_{1 \rightarrow 2}\  = \ \vec{T}_{lim\ 1 \rightarrow 2}\ </math></p>
$\tan(\varphi) = \frac{\ \vec{T}_{1 \rightarrow 2}\ }{\ \vec{N}_{1 \rightarrow 2}\ }$	<p align="center">Coefficient d'adhérence :</p> $\mu = \tan(\varphi_{lim}) = \frac{\ \vec{T}_{lim\ 1 \rightarrow 2}\ }{\ \vec{N}_{1 \rightarrow 2}\ }$
$\ \vec{T}_{1 \rightarrow 2}\  < \mu \cdot \ \vec{N}_{1 \rightarrow 2}\ $	$\ \vec{T}_{1 \rightarrow 2}\  = \mu \cdot \ \vec{N}_{1 \rightarrow 2}\ $
<p><math>\vec{R}_{1 \rightarrow 2}</math> est à l'<b>INTERIEUR</b> du <b>cône d'adhérence</b></p>	<p><math>\vec{R}_{1 \rightarrow 2}</math> est <b>SUR</b> le <b>cône d'adhérence</b></p>
<p><math>\vec{T}_{1 \rightarrow 2}</math> s'oppose à la <b>tendance au glissement de 2/1</b></p>	<p><math>\vec{T}_{1 \rightarrow 2}</math> s'oppose <b>au glissement de 2/1</b>                  Cette composante tangentielle est :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- colinéaire au vecteur vitesse de glissement :  <math display="block">\vec{T}_{1 \rightarrow 2} \wedge \vec{V}_{J \in 2/1} = \vec{0}</math></li> <li>- de sens opposé au vecteur vitesse de glissement :  <math display="block">\vec{T}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{V}_{J \in 2/1} &lt; 0</math></li> </ul>

**La valeur du coefficient d'adhérence** noté en général  $\mu$  ou  $f$  ne dépend pas de l'intensité de la force normale de contact. Elle dépend essentiellement :

- de la nature des matériaux en contact ;
- de la présence ou non de lubrifiant.

Remarque : Elle dépend aussi à moindre échelle de l'état de rugosité des surfaces en contact et de la température des surfaces en contact.

Afin de pouvoir **utiliser** le **modèle de Coulomb** dans l'**application** du **PFS** sur des mécanismes à l'équilibre, on fera toujours l'**hypothèse** que l'on se trouve à la **limite du glissement**. Dans ce cas, pour pouvoir modéliser complètement (sens, direction et norme) l'effort de résistance au glissement, on utilisera la méthode suivante :

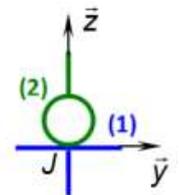
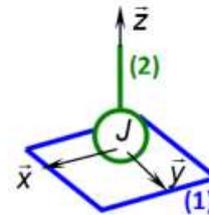
- supposer un mouvement de 2/1 en cas de **rupture de l'adhérence** pour caractériser le **vecteur vitesse de glissement**  $\vec{V}_{J \in 2/1}$  ;
- en déduire la **direction** et le **sens** de la **composante tangentielle** :  $\vec{T}_{1 \rightarrow 2}$  s'oppose à  $\vec{V}_{J \in 2/1}$
- **modéliser** les **actions mécaniques transmissibles** entre les **deux solides en contact ponctuel** :

$$\{T_{1 \rightarrow 2}\}_J = \begin{cases} \|\vec{N}_{1 \rightarrow 2}\| \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2} & - \mu \cdot \|\vec{N}_{1 \rightarrow 2}\| \cdot \vec{t} \\ \vec{0} & \end{cases} \quad \text{avec} \quad \vec{t} = \frac{\vec{V}_{J \in 2/1}}{\|\vec{V}_{J \in 2/1}\|}$$

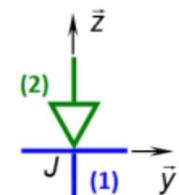
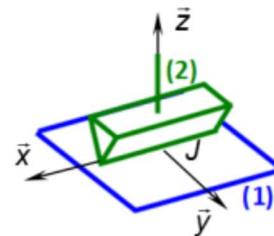
Ainsi la forme du torseur des actions mécaniques transmissibles dans le cas d'une **liaison sphère-plan non parfaite de contact J** et de normale  $\vec{z}$  où la tendance au **glissement se fait suivant  $\vec{y}$**  est :

$$\{T_{1 \rightarrow 2}\}_J = \begin{cases} \vec{N}_{1 \rightarrow 2} + \vec{T}_{1 \rightarrow 2} \\ \vec{0} \end{cases} = \begin{cases} Z_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{z} + Y_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{y} \\ \vec{0} \end{cases}$$

Avec  $|Y_{1 \rightarrow 2}| \leq \mu \cdot |Z_{1 \rightarrow 2}|$ , le sens de la tendance au glissement de 2/1 donnera le signe de  $Y_{1 \rightarrow 2}$



Dans le cas d'une **hypothèse de problème plan**, le torseur des actions mécaniques transmissibles dans une **liaison cylindre-plan de ligne de contact perpendiculaire au plan** et de normale  $\vec{z}$  où la tendance au **glissement se fait suivant  $\vec{y}$** , a la même forme.



### Phénomène d'arc-boutement

On appelle arc-boutement (aussi appelé coincement), un phénomène issu de l'adhérence pour lequel un équilibre subsiste indépendamment de l'intensité de l'effort qui tend à le rompre.

#### Exemple :

Sur ce meuble TV à étagère réglable en hauteur, c'est le phénomène d'arc-boutement qui solidarise l'étagère mobile à la colonne fixe. Plus le poids de ce qui est posé sur l'étagère est grand, plus l'adhérence entre la tablette et la colonne est garantie.



### 3.3 Modélisation des AM transmissibles dans une liaison sphère-plan avec prise en compte des résistances au roulement et au pivotement

Le raisonnement effectué pour le glissement peut être appliqué au roulement et au pivotement.

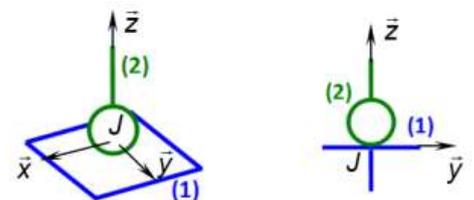
Par analogie avec les lois de Coulomb :

- le roulement ou la tendance au roulement donnera naissance à une **résistance au roulement** modélisée par un **moment de résistance au roulement** ;
- le pivotement ou la tendance au pivotement donnera naissance à une **résistance au pivotement** modélisée par un **moment de résistance au pivotement**.

Soit  $J$  un point de contact entre deux solides 1 et 2. Selon les cas, l'action mécanique de 1→2 est modélisée en  $J$ , par le torseur suivant :

Pivotement ou tendance au pivotement	Roulement ou tendance au roulement
$\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{cases} \vec{N}_{1 \rightarrow 2} \\ \vec{M}_{J, 1 \rightarrow 2}^{piv} \end{cases}$	$\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{cases} \vec{N}_{1 \rightarrow 2} \\ \vec{M}_{J, 1 \rightarrow 2}^{roul} \end{cases}$
$\vec{M}_{J, 1 \rightarrow 2}^{piv}$ est le <b>moment de résistance au pivotement</b> en $J$ .	$\vec{M}_{J, 1 \rightarrow 2}^{roul}$ est le <b>moment de résistance au roulement</b> en $J$ .
- Il s'oppose au <b>pivotement</b> ou à la <b>tendance au pivotement</b> de 2/1. - Il est <b>dirigé</b> suivant la <b>normale</b> au contact. - On a : $\ \vec{M}_{J, 1 \rightarrow 2}^{piv}\  \leq \delta \cdot \ \vec{N}_{1 \rightarrow 2}\ $ avec $\delta$ le <b>coefficient de résistance au pivotement</b> (en m)	- Il s'oppose au <b>roulement</b> ou à la <b>tendance au roulement</b> de 2/1. - Il est <b>contenu</b> dans le <b>plan tangent</b> au niveau du <b>contact</b> - On a : $\ \vec{M}_{J, 1 \rightarrow 2}^{roul}\  \leq \eta \cdot \ \vec{N}_{1 \rightarrow 2}\ $ avec $\eta$ le <b>coefficient de résistance au roulement</b> (en m)
<b>Exemple :</b> En phase de virage avec ce chariot de manutention, il existe un moment de résistance au pivotement du sol sur la roue (dirigé suivant $\vec{z}$ ) qui s'oppose à l'action mécanique fournie par l'utilisateur pour orienter la roue directrice. 	<b>Exemple :</b> Parmi les critères à étudier lors de l'achat de pneumatique pour sa voiture, il y a l'indice de résistance au roulement. Plus celui-ci est bon, plus la consommation de carburant sera faible. 

On notera enfin que les phénomènes de **résistance au glissement**, au **pivotement** et au **roulement** peuvent se **combinaer** et être rencontrés dans une même étude. Ainsi la forme du torseur des actions mécaniques transmissibles dans le cas d'une liaison **sphère-plan non parfaite de contact  $J$  et de normale  $\vec{z}$**  où la tendance au **glissement se fait** suivant  $\vec{y}$  et la tendance au **roulement** suivant  $\vec{x}$  est :



$$\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{cases} \vec{N}_{1 \rightarrow 2} + \vec{T}_{1 \rightarrow 2} \\ \vec{M}_{J, 1 \rightarrow 2}^{piv} + \vec{M}_{J, 1 \rightarrow 2}^{roul} \end{cases} = \begin{cases} Z_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{z} + Y_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{y} \\ N_{J, 1 \rightarrow 2} \cdot \vec{z} + L_{J, 1 \rightarrow 2} \cdot \vec{x} \end{cases}$$

avec: -  $|Y_{1 \rightarrow 2}| \leq \mu \cdot |Z_{1 \rightarrow 2}|$ , le sens de la tendance au glissement de 2/1 donnera le signe de

-  $|N_{J, 1 \rightarrow 2}| \leq \delta \cdot |Z_{1 \rightarrow 2}|$ , le sens de la tendance au pivotement de 2/1 donnera le signe de

-  $|L_{J, 1 \rightarrow 2}| \leq \eta \cdot |Z_{1 \rightarrow 2}|$ , le sens de la tendance au roulement de 2/1 donnera le signe de

## 4. Modéliser localement les actions mécaniques

### 4.1 Action mécanique à distance et de contact

On rappelle que l'on appelle **action mécanique** (notée AM), toute cause capable de :

- provoquer ou modifier le mouvement d'un solide ;
- provoquer la déformation d'un solide.

On distingue les actions mécaniques à distance et de contact.

Les **actions mécaniques à distance** agissent sur tout le volume du solide (exemples : actions magnétiques, action de la pesanteur...).

Les **actions mécaniques de contact** agissent directement sur la surface du solide (exemples : pression d'un fluide, action de contact entre deux solides...).

Une **action mécanique** d'un élément  $i$  sur un solide  $j$  (AM de  $i \rightarrow j$ ) est **toujours répartie sur la surface** (action de contact) **ou sur le volume** (action à distance) du solide, contrairement à ce que pouvait laisser croire le modèle utilisé jusqu'à maintenant (action appliquée en un point). La **modélisation locale** permettra donc de **modéliser finement** ces actions à distances et ces actions de contact.



Action d'un champ magnétique sur un cube de métal.



Action de l'eau sur la coque du bateau.  
Action du vent sur le cerf-volant.

### 4.2 Modèle locale d'une action mécanique à distance

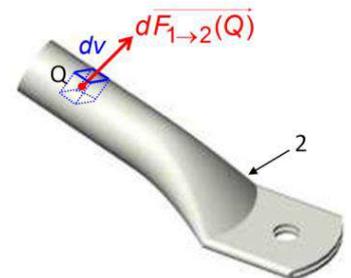
Soit  $Q$ , un point appartenant à un solide 2 et concerné par une action mécanique à distance. On modélise localement l'action mécanique à distance par une **force élémentaire**  $d\vec{F}_{1 \rightarrow 2}(Q)$  agissant sur un volume  $dV$  de dimension réduite défini au voisinage de  $Q$ , telle que :

$$d\vec{F}_{1 \rightarrow 2}(Q) = \vec{q} \cdot dV$$

avec  $\vec{q}$  la densité volumique en  $[\text{N} \cdot \text{m}^{-3}]$

**Exemple :** action de la pesanteur sur un solide 1.

$\forall Q \in 1$ , on a :  $d\vec{F}_{pes \rightarrow 1}(Q) = dm \cdot \vec{g} = \rho \cdot dV \cdot \vec{g}$  avec  $\rho$  la masse volumique de 1 et  $\vec{g}$  le champ de pesanteur.



### 4.3 Modèle locale d'une action mécanique de contact linéique ou surfacique

Soit  $Q$ , un point appartenant à un solide 2 et concerné par une action mécanique de contact. On modélise localement l'action mécanique de contact par une **force élémentaire**  $d\vec{F}_{1 \rightarrow 2}(Q)$  agissant sur une ligne  $dl$  ou une surface  $dS$  de dimension réduite défini au voisinage de  $Q$ , telle que :

$$d\vec{F}_{1 \rightarrow 2}(Q) = d\vec{N}_{1 \rightarrow 2}(Q) + d\vec{T}_{1 \rightarrow 2}(Q), \text{ où :}$$

-  $d\vec{N}_{1 \rightarrow 2}(Q)$  est la **force élémentaire de pression** normale au plan de contact ;

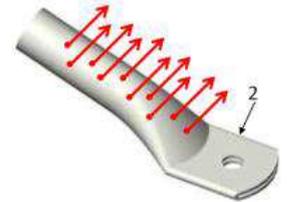
-  $d\vec{T}_{1 \rightarrow 2}(Q)$  est la **force élémentaire de résistance au glissement** appartenant au plan tangentiel de contact :  $\|d\vec{T}_{1 \rightarrow 2}(Q)\| \leq \mu \cdot \|d\vec{N}_{1 \rightarrow 2}(Q)\|$



L'expression de la force élémentaire de pression  $d\vec{N}_{1\rightarrow 2}(Q)$  varie en fonction de la nature du contact, associé à Q :

Nature du contact		Pression $p$ de l'action mécanique	Expression de $\ d\vec{N}_{1\rightarrow 2}(Q)\ $
Ligne : $dl$		Pression linéique en $[N.m^{-1}]$	$\ d\vec{N}_{1\rightarrow 2}(Q)\  = p(Q). dl$
Surface : $dS$		Pression surfacique en $[N.m^{-2}]$ ou $[Pa]$	$\ d\vec{N}_{1\rightarrow 2}(Q)\  = p(Q). dS$

L'ensemble des forces élémentaires agissant sur l'ensemble des éléments concerné par l'action mécanique est appelé **champ de forces** associé à l'action mécanique. C'est la connaissance de ce champ de forces qui peut permettre d'étudier les déformations d'un solide soumis à une action mécanique (pas au programme).



#### 4.4 Relation entre le modèle local et le modèle global

Dans le but d'appliquer le principe fondamental de la statique ou de la dynamique à un mécanisme, on fait l'hypothèse que les pièces qui les constituent, sont indéformables. Dans ce cas, on a intérêt à utiliser un modèle global des actions mécaniques comme cela a été fait jusqu'à maintenant.

Le **modèle global d'une action mécanique** est l'action équivalente à l'ensemble des actions locales.

La relation entre ces deux modèles est donnée ci-dessous :

$$\{T_{1\rightarrow 2}\} = \begin{cases} \vec{R}_{1\rightarrow 2} \\ \vec{M}_A, 1\rightarrow 2 \end{cases} = \begin{cases} \int_Z d\vec{F}_{1\rightarrow 2}(Q) \\ \int_Z \vec{AQ} \wedge d\vec{F}_{1\rightarrow 2}(Q) \end{cases}$$

avec  $Z$  la zone du solide 2 sur laquelle s'exerce l'AM de  $1\rightarrow 2$ .

On a alors :

- pour une ligne :  $\int$
- pour une surface :  $\iint$
- pour un volume :  $\iiint$

### Sources

J. Le Goff, S. Génouel, « Cours de Sciences Industrielles de l'Ingénieur CPGE 1<sup>ère</sup> année », Pôle Chateaubriand Joliot-Curie, 2013