Seq. 2 - Chap. 2

<u>Préreauis</u>

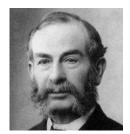
✓ Séquence II – Chapitre 2

<u>Objectifs</u>

- Définir un SLCI
- Maitriser la transformée de Laplace
- Calculer une fonction de transfert à partir d'équations

M. II. 2. a

<u>Savoir-faire associés</u>



Chapitre



Edgar Routh et un exemple de systèmes asservi dans le domaine médical

PLAN DU CHAPITRE

I.	Systèmes Linéaires Continus et Invariants	2
II.	Les modélisations	3
III.	.La transformée de Laplace	4
A	. Définition	4
\mathcal{B}	. Propriété de la transformée de Laplace	5
C	. Notion de fonction de Transfert	6
IV.	Validation des performances d'un système	8
A	. Stabílíté	8
	1. Condition nécessaire de stabilité	8
	2. Crítère de Routh simplifié	8
B	. Précision	9



I. Systèmes Linéaires Continus et Invariants

Pour des raisons de simplicité, nous nous intéresserons cette année uniquement aux Systèmes Linéaires Continus et Invariants

<u>Définition 1 – Système monovariable :</u> C'est un système ne possédant qu'une seule entrée et une seule sortie

<u>Définition 2 – Système linéaire :</u> Un système est dit linéaire s'il satisfait aux principes de proportionnalité et de superposition.

Soit s(t) la réponse à l'entrée e(t) et k, un réel quelconque, le principe de proportionnalité est vérifié si la réponse à l'entrée k·e(t) est k·s(t), comme l'illustre la Figure 1.

$$k.e(t) \rightarrow || Système || \rightarrow k.s(t)$$

Figure 1: Principe de proportionnalité

Soit $s_1(t)$ et $s_2(t)$, les réponses aux entrées $e_1(t)$ et $e_2(t)$, le principe de superposition est vérifié si la réponse à l'entrée $e_1(t) + e_2(t)$ est $s_1(t) + s_2(t)$, comme l'illustre la Figure 2.

$$e(t) = \sum_{i} e_i(t) \rightarrow \text{Système} \rightarrow s(t) = \sum_{i} s_i(t)$$

Figure 2: Principe de proportionnalité

La sortie d'un système soumis à N entrées (ou à une somme d'entrées et de perturbations) peut être calculée en additionnant les réponses du système aux N entrées appliquées séparément, grâce à l'hypothèse de linéarité.

La plupart des systèmes physiques ne sont pas linéaires sur la totalité de leur domaine d'application. Cependant, lorsque le système est utilisé dans une zone réduite du domaine d'application, il est possible de linéariser la réponse du système dans cette zone (Figure 3). Il s'agit souvent en pratique d'une approximation par la tangente au point de fonctionnement, appelée approximation linéaire tangente, Figure 3. On parle alors de linéarisation de système non linéaire.

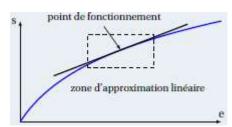


Figure 3: Linéarisation d'un système non linéaire

<u>Définition 3 – Système continu</u>: Un système est continu si les fonctions d'entrée et de sortie sont définies pour tout instant t. Les signaux sont dits analogiques.

Dans les systèmes de commande modernes, l'information est traitée informatiquement, ce qui nécessite un échantillonnage des signaux. Ceux sont donc des systèmes et des signaux discrets, Figure 4. Très souvent, la période d'échantillonnage est très inférieure au temps de réponse du



système (5 μ s pour l'échantillonnage contre quelques millisecondes pour le processus), si bien qu'il est alors possible d'assimiler le comportement à celui d'un système continu.

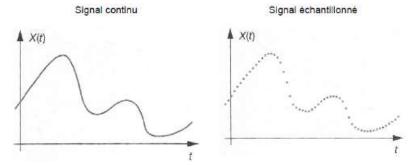


Figure 4: Un signal continu et un signal échantillonné

Les systèmes automatisés réels ne sont ni continus, ni invariants, ni linéaires. On se ramène au cas des SLCI en faisant des hypothèses simplificatrices. La comparaison du modèle avec la réalité permettra de valider ou non les hypothèses proposées.

II.Les modélisations

Dans le cadre des systèmes de commande, un modèle est une représentation mathématique du comportement du système obtenu à partir de lois physiques et permettant de prévoir l'évolution des grandeurs au cours du temps pour une entrée donnée.

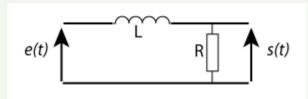
Pour modéliser un SLCI, il est nécessaire de déterminer une équation reliant l'entrée e(t) (ou les entrées) et la sortie s(t). Sous les hypothèses de continuité, de linéarité et d'invariance dans le temps, la relation de comportement d'un système peut se mettre sous la forme d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants. Sous sa forme générale, cette équation peut se mettre sous la forme :

$$a_0 \cdot s(t) + a_1 \cdot \frac{ds}{dt}(t) + \dots + a_n \cdot \frac{d^n s}{dt^n}(t) = b_0 \cdot e(t) + b_1 \cdot \frac{de}{dt}(t) + \dots + b_m \cdot \frac{d^m e}{dt^m}(t)$$

On appelle *n* l'ordre du système.

<u>Définition 4 – Causalité</u>: Il faut que m < n pour que le système soit physiquement réalisable.

Exemple 1: On s'intéresse à un circuit RL (résistance + bobine). La tension e(t) est l'entrée, la sortie est la tension aux bornes de la résistance s(t). Déterminer l'équation différentiel régissant le comportement de ce système et donner son ordre.



Les équations électriques nous donnent :

$$e(t) = L \cdot \frac{di}{dt}(t) + R \cdot i(t)$$
$$s(t) = R \cdot i(t)$$



On obtient alors une équation différentielle reliant l'entrée à la sortie :

$$\frac{L}{R} \cdot \frac{ds}{dt}(t) + s(t) = e(t)$$

 $\frac{L}{R} \cdot \frac{ds}{dt}(t) + s(t) = e(t)$ Il s'agit d'une équation du premier ordre. On note τ =L/R la constante de

Entrainement 1 : On s'intéresse au mouvement d'une roue par rapport au châssis par l'intermédiaire d'un amortisseur et ressort. Ce système peut être modélisé par une masse reliée en série à un ressort et un amortisseur monté en parallèle. Y(t)fa

L'écriture sous forme d'équations différentielles des SLCI n'est pas très bien adaptée aux études qui nous intéressent. L'outil privilégié pour traiter un SLCI de manière efficace est la transformation de Laplace qui permet d'obtenir simplement une relation algébrique entre la sortie et l'entrée du système.

III.La transformée de Laplace

La transformée de Laplace est une application mathématique permettant d'exprimer une fonction temporelle dans un domaine virtuel, le domaine de Laplace, où la manipulation des expressions sera bien plus simple.

A. Définition

Définition 5 – Transformée de Laplace : Soit $f: t \rightarrow f(t)$, une fonction temporelle représentant généralement un signal ou une grandeur physique évoluant au cours du temps. On note F (p) la transformée de Laplace de f(t), où p est la variable de Laplace (notée s dans les pays anglophone). On a alors : $F(p) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-p \cdot t} \cdot dt$

$$F(p) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-p \cdot t} \cdot dt$$

Cette définition n'est pas à connaître, seul l'utilisation pratique des transformées de Laplace est exigible en CPGE.

Ces fonctions f représentent des grandeurs physiques : intensité, température, effort, vitesse... Dans les cas rencontrés en ingénierie, les conditions d'existence de la transformée sont toujours réunies.

<u>Définition 5 – Convention de notation :</u>

La transformée de Laplace est notée $F(p) = \mathfrak{L}(f(t))$.

La transformée inverse est notée $f(t) = \mathfrak{L}^{-1}(F(p))$.

Par habitude, et quand cela est possible, une lettre minuscule sera utilisée pour noter le signal dans le domaine temporel, et la lettre majuscule pour noter la transformée de Laplace de ce signal.



Cependant, si dans un énoncé, la grandeur temporelle est déjà en majuscule, on confondra les deux écritures, il faudra toutefois bien veiller à préciser la variable associée au domaine d'étude (C(t) pour le domaine temporel et C(p) pour le domaine de Laplace).

Exemple 2 : La transformée de Laplace d'un échelon d'amplitude e_0 : Application de la définition de la transformée de Laplace pour déterminer la transformée de $e(t) = e_0.u(t)$.

$$E(p) = \int_0^\infty e_0 \cdot u(t) \cdot e^{-p \cdot t} \cdot dt$$

$$E(p) = e_0 \int_0^\infty e^{-p \cdot t} \cdot dt$$

$$E(p) = e_0 \left[\frac{e^{-p \cdot t}}{-t} \right]_0^\infty$$

$$E(p) = \frac{e_0}{p}$$

<u>Définition 5 – Condition de Heaviside</u>: Une fonction du temps e(t) vérifie les conditions de Heaviside si elle vérifie :

$$f(0^{-}) = 0, f(\dot{0}^{-}) = 0, f(\ddot{0}^{-}) = 0,...$$

C'est-à-dire si les conditions initiales sont nulles et le système est au repos pour t <0

Consigne	Impulsion	Échelon	Rampe	Sinus	Cosinus	Sinus amortie	Retard
e(t)	$\delta(t)$	$E_0 u(t)$	a t u(t)	$\sin(\omega t)u(t)$	$\cos(\omega t)u(t)$	$e^{-at}\sin(\omega t)u(t)$	f(t-T)u(t)
E(p)	1	$\frac{E_0}{p}$	$\frac{a}{p^2}$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$	$e^{-Tp}F(p)$

Tableau 1: fonction usuelle et leur transformée de Laplace

B. Propriété de la transformée de Laplace

Propriété 1 – Linéarité de la TL:

$$\mathcal{L}\left[a \cdot f(t) + b \cdot g(t)\right] = a \cdot \mathcal{L}\left[f(t)\right] + b \cdot \mathcal{L}\left[g(t)\right]$$

Propriété 2 – Dérivation de la TL:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(p)$$

$$\mathcal{L}[f'(t)] = p \cdot F(p) - f(0^{+})$$

$$\mathcal{L}[f''(t)] = p^{2} \cdot F(p) - p \cdot f(0^{+}) - f'(0^{+})$$

Dans les conditions de Heaviside, dériver dans le domaine temporel revient à multiplier par p dans le domaine de Laplace.

Propriété 3 – Intégration de la TL:

$$g(t) = \int_0^t f(x) dx$$
$$\mathcal{L}[g(t)] = \frac{F(p)}{p}$$



Propriété 4 – Théorème du retard :

Soit g la fonction retardée d'une fonction f d'un temps τ tel que :

$$g(t) = f(t-\tau)$$

On a alors:

$$\mathcal{L}[g(t)] = \mathcal{L}[f(t-\tau)] = e^{-p\tau} \cdot \mathcal{L}[f(t)]$$

Propriété 5 – Théorème de la valeur initiale :

$$\lim_{t\to 0} s(t) = \lim_{p\to\infty} p \cdot S(p)$$

Propriété 6 – Théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t\to\infty} s(t) = \lim_{p\to 0} p \cdot S(p)$$

Exemple 3 : On s'intéresse à un circuit RL (résistance + bobine).

Déterminer la relation obtenue après application de la transformée de Laplace.

$$\frac{L}{R} \cdot p \cdot S(p) + S(p) = E(p)$$

<u>Entrainement 2 :</u> Déterminer la transformée de Laplace de l'équation différentielle :

$$7\frac{d^5s}{dt^5}(t) + 4\frac{d^3s}{dt^3}(t) + 3\frac{d^2s}{dt^2}(t) = 5\frac{d^2e}{dt^2}(t) + 3\frac{de}{dt}(t) + 2e(t)$$

C. Notion de fonction de Transfert

Soit le modèle, associé au système de la Figure 5, traduisant la relation entre l'entrée e(t) et la sortie s(t) d'un SLCI sous la forme d'une équation différentielle :

$$e(t) \rightarrow || Système || \rightarrow s(t)$$

Figure 5: Schématisation d'un système

$$a_0 \cdot s(t) + a_1 \cdot \frac{ds}{dt}(t) + \dots + a_n \cdot \frac{d^n s}{dt^n}(t) = b_0 \cdot e(t) + b_1 \cdot \frac{de}{dt}(t) + \dots + b_m \cdot \frac{d^m e}{dt^m}(t)$$

En appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de cette équation et en considérant les conditions initiales nulles, on a :

$$a_0 \cdot S(p) + a_1 \cdot p \cdot S(p) + \dots + a_n \cdot p^n \cdot S(p) = b_0 \cdot E(p) + b_1 \cdot p \cdot E(p) + \dots + b_m \cdot p^m \cdot E(p)$$

Soit:

$$[a_0 + a_1 \cdot p + \dots + a_n \cdot p^n] \cdot S(p) = [b_0 + b_1 \cdot p + \dots + b_m \cdot p^m] \cdot E(p)$$

D'où

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{[b_0 + b_1 \cdot p + \dots + b_m \cdot p^m]}{[a_0 + a_1 \cdot p + \dots + a_n \cdot p^n]}$$



<u>Définition 6 – Fonction de transfert</u>: On appelle fonction de transfert la fraction:

$$\frac{S(p)}{E(p)} = H(p)$$

La fonction de transfert est une fraction de deux polynômes de variable p. Elle caractérise un SLCI de façon indépendante de l'entrée qui lui est appliquée. Elle ne dépend que de la variable symbolique p et des paramètres du système. La fonction de transfert d'un système est le modèle de ce système dans le domaine de Laplace. Si H(p) est une fonction de transfert, alors : S(p) = H(p)*E(p). Ce qu'on peut exprimer sous la forme d'un schéma-blocs, Figure 6.

$$E(p) \rightarrow H(p) \rightarrow S(p)$$

Figure 6 : Schématisation sous forme de schéma-blocs

<u>Propriété 7 :</u> La fonction de transfert est indépendante de l'entrée qui lui est appliquée. Elle ne dépend que de la variable symbolique p et des paramètres du modèle.

<u>Définition 7 – Forme canonique :</u> Une fonction de transfert sous forme canonique est de la forme :

$$\frac{S(p)}{E(p)} = H(p) = \frac{K}{p^{\alpha}} \cdot \frac{1 + c_1 \cdot p + \dots + c_n \cdot p^n}{1 + d_1 \cdot p + \dots + d_m \cdot p^m} = \frac{N(p)}{D(p)}$$

Avec:

• K : le gain statique du modèle,

• α : la classe du système

• n : l'ordre du système

<u>Définition 8 :</u> On appelle alors pôles les racines du dénominateur et zéros les racines du numérateur. Ils peuvent être réels ou complexes.

Exemple 4 : On s'intéresse à un circuit RL (résistance + bobine). Déterminer la fonction de transfert.

$$H(p) = \frac{1}{1 + \frac{L}{R} \cdot p}$$

Entrainement 3 : Déterminer la forme canonique de la fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{2 + 3 \cdot p + 5 \cdot p^2}{3 \cdot p^2 + 4 \cdot p^3 + 7 \cdot p^5}$$



IV. Validation des performances d'un système

A. Stabilité

On rappelle qu'un système est considéré comme stable si, pour une entrée en échelon, la grandeur de sortie converge vers une valeur constante, dite valeur finale. Cette performance doit être prédite en premier. Comme les autres performances, la stabilité est intrinsèque au modèle et est totalement indépendante du type d'entrée auquel il est soumis.

1. Condition nécessaire de stabilité

<u>Propriété 8 – Condition fondamentale de stabilité :</u> Un SLCI est stable si et seulement si ses pôles sont à partie réelle strictement négative.

Un pôle nul implique un modèle instable. Or un pôle nul implique aussi une classe > 1. Ainsi, un modèle stable a nécessairement sa classe nulle.

2. Critère de Routh simplifié

<u>Définition 9 – Polynôme caractéristique</u>: Lorsque la fonction de transfert est écrite sous la forme suivante, D(p) est appelé polynôme caractéristique.

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\left[b_0 + b_1 \cdot p + \dots + b_m \cdot p^m\right]}{\left[a_0 + a_1 \cdot p + \dots + a_n \cdot p^n\right]} = \frac{N(p)}{D(p)}$$

<u>Propriété 9 – Critère de Routh simplifié :</u> Pour qu'un modèle soit stable, il est nécessaire que tous les coefficients a_i du polynôme caractéristique D(p) soient tous strictement de même signe.

<u>Propriété 10 :</u> Pour les polynômes caractéristiques de degré 1 et de degré 2, cette condition est suffisante pour assurer la stabilité

<u>Propriété 11 :</u> Pour les polynômes caractéristiques de degré 3, la condition $a_1 \cdot a_2 > a_0 \cdot a_3$ est également nécessaire pour assurer la stabilité.

Entrainement 4 : Déterminer sans calcul la stabilité des 3 modèles suivant :

$$H(p) = \frac{1}{2 + 5 \cdot p + 2 \cdot p^2 + p^4}$$

$$H(p) = \frac{1 + 3 \cdot p}{4 + 3 \cdot p - 2 \cdot p^2 + 6 \cdot p^3 + 8 \cdot p^4}$$

$$H(p) = \frac{1 + 2 \cdot p^2}{8 + 10 \cdot p + 4 \cdot p^2 + 2 \cdot p^3}$$



B. Précision

On rappelle que:

- la notion d'erreur n'a de sens que si l'on compare des grandeurs de consigne et de sortie qui sont de même nature
- la précision est caractérisée par l'erreur en régime permanent, appelée aussi erreur statique

Pour calculer la limite à convergence d'une sortie s(t) d'un système stable à partir de l'expression de la sortie dans le domaine de Laplace S(p), on utilise le théorème de la valeur finale. L'entrée choisie est généralement une entrée en échelon. Pour déterminer la précision, il faut calculer $S(p) = H(p) \cdot E(p) = H(p) \cdot E(p) + E(p) \cdot E(p) + E($

$$e_r = \lim_{t \to \infty} [e(t) - s(t)] = \lim_{p \to 0} p \cdot [E(p) - S(p)]$$

Entrainement 5 : Déterminer l'erreur en régime permanent du système modélisé par H(p) et soumis à une entrée en échelon d'amplitude E0 :

$$H(p) = \frac{k}{1 + a \cdot p + b \cdot p^2 + c \cdot p^3}$$

Références

- [1] Cours de MPSI du lycée La Fayette, Clermont-Ferrand, 2013 (Pr. Pinault Bigeard)
- [3] Cours de PCSI du lycée Joffre, Montpellier, 2019 (Pr. Fraysse)
- [3] Cours de PCSI du lycée Saint Stanislas, 2019 (Pr. Parrila)
- [2] Cours de PCSI du lycée Kleber, Strasbourg, 2019
- [6] Cours du lycée d'Arsonval, Saint-Maur-des-Fossés, 2019 (Pr. Paillet)
- [7] Cours de PCSI du lycée Carnot, Dijon, 2018, (Pr. Gondor)