Préparation en Mathématiques à la rentrée 2022

Pour toute question, vous pouvez me joindre à d.zarouf@cpge-brizeux.fr

1 Révisions

Nous débuterons l'année par un chapitre d'algèbre linéaire puis très vite nous enchaînerons par des compléments sur les séries numériques. Aussi,nous utiliserons sans arrêt à travers nos chapitres de PSI, les complexes, les polynômes, les fonctions usuelles , la trigonométie : C'est pourquoi, je vous demande de revoir sérieusement les chapitres suivants :

1. Les complexes dont il faut impérativement connaître :
   (a) Forme algébrique, forme trigonométrique, module, conjugué, la relation entre module et conjugué.
   (b) Nombres complexes de module 1 et trigonométrie : définition de e^{it}. Formule d'Euler, Technique de l'angle moitié, factorisation de $1 \pm e^{it}$, $e^{ip} \pm e^{iq}$, Formule de Moivre.
   (c) Racines n-ièmes.
   (d) Exponentielle complexe.
   (e) Interprétation géométrique des complexes.
2. Les fonctions usuelles : définitions et leurs études.
3. Les polynômes dont il faut impérativement connaître :
   (a) Tout le vocabulaire propre aux polynômes : coefficients, décomposition canonique, degré, coefficient dominant, espaces $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}_n[X]$.
   (b) Divisibilité et Théorème de la division euclidienne.
   (c) Fonctions polynômiales et racines : définition d'une racine , ordre de multiplicité, caractérisation à l'aide des polynômes dérivés, polynôme scindé, relation entre coefficients et racines (somme et produit des racines).
   (d) Polynômes irréductibles.
4. L'algèbre linéaire :
   (a) Calcul matriciel : savoir faire les différentes opérations sur les matrices, montrer qu'une matrice est inversible, déterminer l'inverse.
   (b) Espaces vectoriels :connaître les espaces vectoriels de référence, montrer qu'un ensemble est un sous espace vectoriel, le mettre sous forme de $\text{vect}((x_i)_{i\in I})$.
   (c) Espaces de dimension finie : notion de bases et de dimension finie, connaître les différentes méthodes pour obtenir une base, sous espaces supplémentaires, base adaptée à un sev, à une décomposition en somme directe de deux sev.
   (d) Applications linéaires :
      i. méthode pour montrer qu'une application est linéaire, isomorphisme, endomorphisme, automorphisme.
      ii. Image directe, image réciproque, image, noyau.
      iii. $\dim \mathscr{L}(E, F)$.
      iv. Projecteur et symétrie.
      v. Théorème du rang.
      vi. Formes linéaires et hyperplans en dimension finie.
   (e) Matrices et applications linéaires :
      i. savoir construire la matrice d'une application linéaire et savoir déterminer l'application linéaire canoniquement associée à une matrice, déduction du noyau, rang, de l'image.
      ii. Changement de bases : effet d'un changement de base sur la matrice d'un vecteur, effet d'un changement du couple de bases sur la matrice d'une application linéaire, effet d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme, matrices semblables.
   (f) Déterminants :
      i. définition, cas particulier en dimension 2 et 3.
      ii. Caractérisation d'une base.
      iii. Déterminant d'un endomorphisme et d'une matrice carrée : déterminant d'un produit de matrices, du produit λA où $\lambda \in \mathbb{K}$, de la transposée, caractérisation d'une matrice inversible.
      iv. Calcul d'un déterminant.

2 Différents formulaires pour simplifier les calculs

Le formulaire joint donne toutes les formules à connaître absolument : dérivées, primitives, développements limités, formules trigonométriques.... A Lire, relire, apprendre, ré-apprendre jusqu'à ce que ces formules soient acquises comme les tables d'addition et de multiplication que vous connaissez depuis la primaire. Associez ce formulaire au cahier de calculs que vous avez eu en début de Sup.
Il y aura une interrogation écrite le Mardi 6 Septembre 2022 concernant les 6 premiers paragraphes de ce poly.

3 Devoir Libre Obligatoire n°1 à rendre le Mardi 6 Septembre 2022

Une fois vos cours précédents revus, vous pourrez traiter le devoir suivant. A vous d'aller chercher dans vos cours, TD, Devoirs déjà faits les méthodes et idées pour avancer dans la résolution de ces exercices.
Vous faites ce que vous pouvez ! mais faites ! ! ! ! Il est inacceptable de ne rien faire ou presque. Il faut toujours au moins passer 10h sur ces sujets et pour un devoir libre, on y passe deux heures puis on y revient le lendemain avec de nouvelles idées car cela a cogité la nuit pendant le sommeil ! ou on se rappelle de quelque chose qu'on va vérifier dans son cours ou TD.... Ce sont des méthodes de travail à adopter. Il ne faut pas attendre que cela tombe tout cuit dans le bec !

Les trois premiers exercices sont obligatoires et le quatrième est destiné à ceux qui peuvent et veulent aller plus loin.

Exercice I (Extraît CCINP)

Q1. Montrer que pour tout $t \neq 0\,[2\pi]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{\sin(t)}{2^n \sin\left(t/2^n\right)}.$$

Q2. Montrer que pour tout $t > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right).$$

On pourra raisonner par récurrence et utiliser l'identité :

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right).$$

Q3. En déduire que pour tout $t \neq 0\,[2\pi]$:

$$\frac{\sin(t)}{t} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right).$$

Q4. Déterminer :

$$\lim_{n\to+\infty} 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}}$$

en écrivant cette quantité à l'aide d'une somme de Riemann.

Q5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $k \in [\![0, 2^{n-1}]\!]$:

$$\left| \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} - \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}} \right| \leqslant \frac{4 \times 2^{n-1} + 1}{1 + 2^{2n}} \times \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}}$$

Q6. En déduire que :

$$\lim_{n\to+\infty} 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \left(\frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} - \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}} \right) = 0$$

Q7. En déduire que :

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{n\to+\infty} 2^{n+1} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}}.$$

Exercice II (Extraît Banque PT)

On considère la suite $(H_n)_{n\geqslant 1}$ définie par : $H_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$

1. Justifier : $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\int_p^{p+1} \frac{1}{t}dt \leqslant \frac{1}{p}$ et $\forall p \geqslant 2, \displaystyle\frac{1}{p} \leqslant \int_{p-1}^{p} \frac{1}{t}dt$
2. En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 1$: $\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln(n)$.
3. Montrer que la suite $(H_n - \ln(n))_{n\geqslant 1}$ converge.
   (*on pourra étudier sa monotonie en utilisant l'inégalité* $\forall x > -1, \ln(1+x) \leqslant x$).
   On notera γ sa limite.
4. Justifier que $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$.
5. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose : $\gamma_n = H_n - \ln(n)$.
   (a) Déterminer un équivalent de $\gamma_{n+1} - \gamma_n$ quand $n \to +\infty$.
   (b) En déduire la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} (\gamma_{n+1} - \gamma_n)$.
   (c) En déduire à nouveau la convergence de la suite $(H_n - \ln(n))_{n\geqslant 1}$.
6. Montrer que : $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\frac{n}{n-1}\right) = \gamma - 1$.
7. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\gamma_n - \gamma = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\ln\left(\frac{k}{k-1}\right) - \frac{1}{k}\right)$.
8. Soit $\varepsilon > 0$.
   (a) Donner le $\mathrm{DL}_3(+\infty)$ de $\ln\left(\dfrac{k}{k-1}\right) - \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{2k(k-1)}$.
   (b) En déduire qu'il existe un entier naturel non nul n_0 tel que, pour tout entier $k \geqslant n_0$:
$$\left|\ln\frac{k}{k-1} - \frac{1}{k} - \frac{1}{2k(k-1)}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{k^2}$$
9. Montrer que,pour tout entier $n \geqslant n_0$,
$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\ln\frac{k}{k-1} - \frac{1}{k} - \frac{1}{2k(k-1)}\right)\right| \leqslant \varepsilon \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$
10. (a) Soit n fixé. Calculer $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2k(k-1)}$. (*Mettre* $\dfrac{1}{2k(k-1)}$ *sous la forme* $\dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k-1}$ *avec* $(a,b) \in \mathbb{R}$).
   (b) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(H_n - \ln(n) - \gamma - \frac{1}{2n}\right)$.
   (c) En déduire le développement asymptotique suivant de H_n :
$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o(1)$$
11. Question bonus indépendante de ce qui précède : On pose pour $n \in \mathbb{N}$ et $a \in]1, +\infty[$, $R_{n,a} = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^a}$.
   (a) Justifier l'existence de $R_{n,a}$.

(b) En utilisant un encadrement des sommes partielles de $\sum_{k\geqslant n+1}\frac{1}{k^a}$ à l'aide de la méthode des rectangles (appelée aussi comparaison série intégrale), montrer que $R_{n,a}$ est équivalent à $\frac{1}{(a-1)n^{a-1}}$ quand n tend vers $+\infty$.

(c) Donner la nature de $\sum_{n\geqslant 0} R_{n,a}$.

Exercice III (Extraît ATS)

On note $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices de taille 3×3 à coefficients réels. On considère les éléments suivants de E :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Partie A : Étude d'un endomorphisme

On considère dans la suite de cette partie l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique notée $\mathcal{B} = (e_l, e_2, e_3)$ et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ tel que

$$\begin{cases} f(e_1) = 2e_1 - e_2 + e_3 \\ f(e_2) = 2e_1 - e_2 + 2e_3 \\ f(e_3) = e_1 - e_2 + 2e_3 \end{cases}$$

1. Déterminer la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}$.
2. Calculer le rang de la matrice A. L'endomorphisme f est-il surjectif ?
3. L'endomorphisme f est-il injectif ? Est-il bijectif ?
4. On pose $e_1' = (1,0,-1)$ et $e_2' = (1,-1,1)$. Montrer que la famille (e_1', e_2') forme une base de l'espace vectoriel $F = \{u \in \mathbb{R}^3 : f(u) = u\}$.
5. (a) Montrer que $\mathcal{B}' = (e_1', e_2', e_1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Calculer la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Partie B : Étude d'une suite de matrices

1. Montrer que $A^2 = 2A - I$.
2. Montrer que la matrice A est inversible et que $A^{-1} = 2I - A$.
3. En déduire $(A^{-1})^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ en fonction de A et I.
4. Soient $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ des nombres réels vérifiant $\alpha I + \beta A = \alpha' I + \beta' A$. Montrer que $\alpha = \alpha'$ et $\beta = \beta'$.
5. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Si $P = \sum_{i=0}^{p} a_i X^i$, on note $P(A) = \sum_{i=0}^{p} a_i A^i$.
   (a) Justifier que $P(A) \in E$.
   (b) Déterminer le polynôme R tel que $A^{-1} = R(A)$.
   (c) Montrer que $\mathbb{R}[A] = \{P(A)/P \in \mathbb{R}[X]\} = \mathrm{vect}(I, A)$.
   (d) Montrer que $\mathbb{R}[A]$ est un sev de E. On en donnera une base et la dimension.

On définit la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E par la condition initiale $X_0 = A$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad X_{n+1} = \frac{X_n^2}{n+1} + 2I - A$$

6. Montrer que pour tout entier naturel n, il existe un unique couple (α_n, β_n) de réels tel que

$$X_n = \alpha_n I + \beta_n A,$$

et que ce couple vérifie la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \begin{cases} \alpha_{n+1} & = & \dfrac{\alpha_n^2 - \beta_n^2}{n+1} + 2 \\ \beta_{n+1} & = & \dfrac{2\beta_n(\alpha_n + \beta_n)}{n+1} - 1 \end{cases}$$

7. Déterminer $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3$, et β_3,
8. Au vu du résultat de la question précédente, conjecturer une expression de α_n et β_n pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, puis montrer cette conjecture. En déduire l'expression de X_n, en fonction de n.

Partie C : Étude d'un endomorphisme de polynômes

On note $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. Il est muni de sa base canonique $(1, X, X^2)$.
On pose $P_0 = 2 - X + X^2$, $P_1 = X^3 - 3X^2 + 3X - 2$ et $P_2 = X^4 - 5X^3 + 6X^2 - 5X + 1$.
On définit l'application h définie par : $\forall P \in \mathbb{R}_2[X], h(P) = P_0P - P_1P' + \frac{1}{2}P_2P''$.

1. Calculer $h(1), h(X), h(X^2)$.
2. Montrer que h est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Donner la matrice de h dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
4. Montrer que $H = \ker\,(h - Id_E)$ est un hyperplan de $\mathbb{R}_2[X]$. En donner une équation linéaire dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, une forme linéaire φ dont H est le noyau, puis un supplémentaire D dans $\mathbb{R}_2[X]$.
5. Quelle est la matrice de h dans une base adaptée à $\mathbb{R}_2[X] \oplus D$? Donner la relation qui relie cette matrice avec celle obtenue en C.3

Exercice IV (Extraît Centrale)

Notations et rappels

Dans tout le sujet, n désigne un entier naturel non nul et E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n.

Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note M^T la transposée de M.Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on appelle *trace de M, notée $tr(M)$* la somme de ses coefficients diagonaux. Si M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on définit la suite des puissances de M par $M^0 = I_n$ et, pour tout entier naturel k, par la relation $M^{k+1} = M\,M^k$.

De même, si u est un endomorphisme de E, on définit la suite des puissances de u par $u^0 = \mathrm{Id}_E$ et, pour tout entier naturel k, par la relation $u^{k+1} = u \circ u^k$.

Une matrice M est dite *nilpotente* s'il existe un entier naturel $k \geqslant 1$ tel que $M^k = 0$. Dans ce cas, le plus petit entier naturel $k \geqslant 1$ tel que $M^k = 0$ s'appelle l'*indice de nilpotence* de M.

Soit $\mathcal{B}$ une base de E, un endomorphisme de E est nilpotent d'indice p si sa matrice dans $\mathcal{B}$ est nilpotente d'indice p.

On pose $J_1 = (0)$ et, pour un entier $\alpha \geqslant 2$, $J_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_\alpha(\mathbb{C})$.

I. Quelques résultats préalables

1. Que peut-on dire d'un endomorphisme nilpotent d'indice 1 ?
2. Montrer que, pour toutes matrices $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$, $\mathrm{tr}\,(AB) = \mathrm{tr}\,(BA)$. En déduire que si il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $B = P^{-1}AP$, alors $\mathrm{tr}\,(A) = \mathrm{tr}\,(B)$
3. Justifier que :$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \forall P \in GL_n(\mathbb{C}), \det(P^{-1}AP) = \det(A)$.

II. Réduction d'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice 2

On suppose que $n = 2$. Soit u un endomorphisme de E nilpotent d'indice $p \geqslant 2$.

1. Montrer qu'il existe un vecteur x de E tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$.
2. Vérifier que la famille $\left(u^k(x)\right)_{0 \leqslant k \leqslant p-1}$ est libre. En déduire que $p = 2$.
3. Montrer que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(u)$.
4. Construire une base de E dans laquelle la matrice de u est égale à J_2.
5. En déduire que les matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ sont exactement les matrices de trace et déterminant nuls.

III. - Réduction d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice 2

On suppose que $n \geqslant 3$. Soit u un endomorphisme de E nilpotent d'indice 2 et de rang r.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$ et que $2r \leqslant n$.
2. On suppose que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u)$. Montrer qu'il existe des vecteurs $e_1, e_2, \ldots, e_r$ de E tels que la famille $\left(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \ldots, e_r, u(e_r)\right)$ est une base de E.
3. Donner la matrice de u dans cette base.
4. On suppose $\mathrm{Im}(u) \neq \mathrm{Ker}(u)$. Montrer qu'il existe des vecteurs $e_1, e_2, \ldots, e_r$ de E et des vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_{n-2r}$ appartenant à $\mathrm{Ker}(u)$ tels que $\left(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \ldots, e_r, u(e_r), v_1, v_2, \ldots, v_{n-2r}\right)$ est une base de E.
5. Quelle est la matrice de u dans cette base ?

FIN