

PARTIE I - Trajectoires des plombs d'une cartoucheEquation du mouvement

- 1) Le Principe Fondamental de la Dynamique (PDF) appliqué au plomb donne :

$$\vec{F}_D + m\vec{g} = m\vec{a}_G = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

soit l'équation différentielle demandée :

$$\boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\rho_a S_{CD}}{2m} \vec{v} \vec{v} = \vec{g}}$$

Premier modèle : trajectoire gravitaire

- 2) La force de frottement initiale est négligeable devant la force de pesanteur ssi :

$$\frac{\rho_a S_{CD}}{2m} v_0^2 \ll g \Leftrightarrow \boxed{v_0 \ll \sqrt{\frac{2mg}{\rho_a \pi R^2 c_D}}}$$

- 3) La force de frottement est négligeable devant la fore de pesanteur donc le PFD devient :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g}$$

qui, projeté sur OX et OZ, donne :

$$\boxed{\begin{cases} m\ddot{X} = 0 \\ m\ddot{Z} = -mg \end{cases}}$$

- 4) On intègre les équations précédentes une première fois :

$$\boxed{\begin{cases} \dot{X} = v_0 \cos(\theta_0) \\ \dot{Z} = -gt + v_0 \sin(\theta_0) \end{cases}}$$

Puis une seconde fois :

$$\boxed{\begin{cases} X = v_0 \cos(\theta_0)t \\ Z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin(\theta_0)t \end{cases}}$$

- 5) La trajectoire est une
- parabole
- d'équation :

$$Z = -\frac{1}{2}g\left(\frac{X}{v_0 \cos(\theta_0)}\right)^2 + X \tan(\theta_0)$$

- 6) La portée du tir est la valeur
- $X_M \neq 0$
- de X telle que
- $Z = 0$
- :

$$Z = 0 \text{ et } X \neq 0 \Leftrightarrow X = \frac{2v_0^2}{g} \cos^2(\theta_0) \tan(\theta_0) = \boxed{\frac{v_0^2}{g} \sin(2\theta_0)} = X_M$$

La hauteur maximale du tir correspond à l'altitude Z quand $\dot{Z} = 0$ soit pour $t_1 = \frac{v_0 \sin(\theta_0)}{g}$, donc

$$H_M = Z(t_1) = -\frac{1}{2}g\left(\frac{v_0 \sin(\theta_0)}{g}\right)^2 + v_0 \sin(\theta_0) \frac{v_0 \sin(\theta_0)}{g}$$

$$\boxed{H_M = \frac{v_0^2 \sin^2(\theta_0)}{2g}}$$

- 7) L'angle initial pour lequel la portée est maximale est la valeur de
- θ_0
- pour laquelle
- $\frac{dX_M}{d\theta_0} = 0$
- ; soit :

$$\frac{dX_M}{d\theta_0} = 2 \frac{v_0^2}{g} \cos(2\theta_0) = 0 \Leftrightarrow \cos(2\theta_0) = 0 \Leftrightarrow 2\theta_0 = \frac{\pi}{2} [\pi]$$

Et comme $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$, la solution est : $\boxed{\theta_0 = \frac{\pi}{4}}$.

- 8) Une régression arithmétique pour les
- diamètres
- de 0,25 mm par numéro en partant de
- $R_1 = 2$
- mm donne :
- $R_k = 2 - (k-1) \times 0,125$
- (en mm)

On complète le tableau en prenant $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$; $v_0 = 380$ m/s ; $m = \rho \times \frac{4}{3} \pi R^3$

$$\text{et } v_\infty = \sqrt{\frac{2mg}{\rho_a \pi R^2 c_D}} = \sqrt{\frac{8gp}{3\rho_a c_D}} R.$$

n°	1	5	10
Rayon R (mm)	2,0	1,5	0,875
Masse m (g)	0,38	0,16	0,031
Portée X_M (km)	15	15	15
Hauteur H_M (km)	3,7	3,7	3,7
v_∞ (m/s)	33	29	22

- 9) Les plombs n°5 ont un diamètre de 3 mm, donc d'après le document 1, la distance maximale possible avec l'angle de tir le plus favorable est de 300 m, alors qu'avec notre modèle on obtient (pour $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$) une portée maximale de 15 km, soit **50 fois plus** !
L'autre facteur qui montre qu'il faut abandonner ce modèle est la valeur de v_∞ qui est de l'ordre de $\frac{v_0}{10}$ et donc $v_0 \ll v_\infty$ **n'est pas vérifié** !

Deuxième modèle : trajectoire de Tartaglia

- 10) Comme $v_0 \gg v_\infty$, on a $\frac{\rho_a S_{CD}}{2} v_0^2 \gg mg$: **la force de pesanteur est négligeable devant la force de traînée.**

- 11) Le PDF donne donc : $\vec{F}_D = m \frac{d\vec{v}}{dt}$
soit : $-\frac{\rho_a S_{CD}}{2} v \vec{v} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$

Dans cette première phase, $\vec{v}$ et $\frac{d\vec{v}}{dt}$ sont tous deux colinéaires à X' et $v = \frac{dx'}{dt}$, donc :

$$-\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\rho_a S_{CD}}{2m} v \vec{v} = \frac{g}{v_\infty^2} v \vec{v} = \frac{g}{v_\infty^2} \frac{dx'}{dt} \vec{v}$$

On pose : $\boxed{\frac{g}{v_\infty^2} = \frac{1}{D}}$ (pour que $D > 0$ comme dans le tableau 2, Q14)

Alors : $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dx'} \frac{dx'}{dt} = -\frac{1}{D} \frac{d\vec{v}}{dx'} \vec{v} \Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{v}}{dx'} = -\frac{1}{D} \frac{\vec{v}}{v}}$

- 12) En faisant une analyse dimensionnelle de cette dernière relation, on détermine immédiatement que **D a la dimension d'une longueur.**

- 13) On projette la relation Q11 sur OX' et on l'intègre :

$$\frac{dv}{dx'} = -\frac{1}{D} v \Leftrightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{dx'}{D} \Rightarrow \ln\left(\frac{v}{v_0}\right) = -\frac{x'}{D} \Rightarrow \boxed{\vec{v} = \vec{v}_0 e^{-\frac{x'}{D}}}$$

D est la distance pour laquelle la vitesse est divisée par e.

- 14) On complète le tableau avec : $d = D \ln\left(\frac{v_0}{10 v_\infty}\right)$;
 $v_u = v_0 e^{-\frac{x_1}{D}}$ avec $X_1 = 40 \text{ m}$ et $E_c = \frac{1}{2} m v_u^2$.

n°	1	5	10
D (m)	110	86	50
v_0/v_∞	11	13	17
d (m)	15,5	23	27
v_u (m/s)	270	240	170
E_c (J)	13,5	4,6	0,45

Rem : Attention aux valeurs de d de l'énoncé qui sont fausses !

- 15) La portée utile d'un tir pourrait être définie par **la distance maximale à laquelle on peut envoyer le plomb dans la direction X' .**

- 16) On suppose qu'il faut comparer les énergies cinétiques qu'on nous a fait calculer, soit celles à 40 m :

$$\frac{E_{c5}}{E_{c1}} = 0,34 \sim \frac{1}{3} \text{ donc il faut } 3 \times 2 = \underline{6 \text{ plombs n°5}}$$

$$\frac{E_{c10}}{E_{c1}} = 0,033 \sim \frac{1}{30} \text{ donc il faut } 30 \times 2 = \underline{60 \text{ plombs n°10}}$$

Comme la première phase s'arrête quand la vitesse n'est plus très grande devant v_∞ , soit environ pour $v \approx 10 v_\infty$, donc pour $X'=d$, on peut dire alors que **la portée utile est :**

$$\boxed{d = D \ln\left(\frac{v_0}{10 v_\infty}\right)}$$

- 17) Dans le document 1, on parle d'une portée utile de 35 à 40 m tout au plus, alors qu'avec notre modèle on obtient une portée utile de $d=15$ à 30 m environ (valeurs rectifiées), **ce qui est cohérent.**

Si les billes sont en fer doux, la masse volumique ρ est plus faible, donc pour le même rayon R, m et v_∞ seraient plus petits, donc D aussi, et v_u et

E_c aussi. L'augmentation de R permet de compenser cet effet afin de conserver la même énergie cinétique E_c .

Si les plombs s'agglutinent, la masse et le diamètre augmentent, donc la portée utile aussi : La distance de sécurité à respecter n'est pas celle indiquée si la grenaille s'agglutine, elle est en réalité plus grande : danger !

Troisième et dernière phase : mouvement rectiligne descendant

18) Cette phase correspond à un mouvement de chute avec résistance de l'air puisqu'on tient compte de la force de frottement de l'air (dans la chute libre, la seule force qui s'exerce sur l'objet est son poids).

19) Le PFD donne : $\vec{F}_D + m\vec{g} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$
On pose $\vec{v} = -v\vec{k}$ puisque le mouvement est vers le bas.
$$\frac{\rho_a S_{CD}}{2} v^2 \vec{k} - m\vec{g} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = -m \frac{dv}{dt} \vec{k}$$
$$\frac{\rho_a S_{CD}}{2} v^2 - mg = -m \frac{dv}{dt}$$

d'où l'équation différentielle : $\frac{dv}{dt} + \frac{\rho_a S_{CD}}{2m} v^2 = g$

Quand la vitesse limite est atteinte, $\frac{dv}{dt} = 0$, et donc :

$$\frac{\rho_a S_{CD}}{2m} v_\infty^2 = g \Rightarrow \boxed{\vec{v}_\infty = -\sqrt{\frac{2mg}{\rho_a S_{CD}}} \vec{k}}$$

On parle de « mur aérodynamique » car la vitesse de cette phase est limitée par la force aérodynamique : force de frottement fluide.

Deuxième phase : la phase intermédiaire

20) On suppose que la vitesse a suffisamment diminué pour qu'elle soit négligeable devant v_∞ , alors la première modélisation s'applique et on est bien dans la phase gravitaire.

21) Pour $\theta_0 = 16^\circ$ on obtient :

$$\begin{cases} \underline{X_M = 264 \text{ m}} & \text{pour le plomb } \underline{n^\circ 1} \\ \underline{X_M = 217 \text{ m}} & \text{pour le plomb } \underline{n^\circ 5} \\ \underline{X_M = 139 \text{ m}} & \text{pour le plomb } \underline{n^\circ 10} \end{cases}$$

A comparer avec la formule : diamètre du plomb $\times 100$ (doc 1) :

$$\begin{cases} \underline{X_M = 400 \text{ m}} & \text{pour le plomb } \underline{n^\circ 1} \\ \underline{X_M = 300 \text{ m}} & \text{pour le plomb } \underline{n^\circ 5} \\ \underline{X_M = 175 \text{ m}} & \text{pour le plomb } \underline{n^\circ 10} \end{cases}$$

Le document 1 donne des valeurs supérieures à celles du calcul théorique, en particulier pour les grands diamètres, mais c'est le bon ordre de grandeur.

Cependant, le calcul théorique est basé sur une approximation et est calculé pour un angle (16°) qui n'est pas forcément celui donnant la portée maximale.

Quant à la formule du document, elle est qualifiée de « grossière » et pour des raisons de sécurité, il vaut mieux qu'elle donne une valeur supérieure à la valeur réelle.

22) En utilisant les valeurs obtenues dans le tableau 2, on calcule $\log\left(\frac{v_0}{v_\infty}\right)$ pour les 3 numéros de plomb considérés et on relève la valeur correspondante de $\theta_{\max}$. On trouve :

n°	$\log\left(\frac{v_0}{v_\infty}\right)$	$\theta_{\max}$
1	2,0	18°
5	2,2	17°
10	2,5	16°

23) En prolongeant éventuellement les courbes, on lit la valeur de l'abscisse du point tel que $Z=0$: c'est la portée maximale X_M :

$$\begin{cases} \underline{X_M = 345 \text{ m}} & \text{pour le plomb } \underline{n^\circ 1} \\ \underline{X_M = 265 \text{ m}} & \text{pour le plomb } \underline{n^\circ 5} \\ \underline{X_M = 170 \text{ m}} & \text{pour le plomb } \underline{n^\circ 10} \end{cases}$$

Ces valeurs sont plus proches de celles du document 1 qu'à la question Q21, toujours légèrement inférieure comme il se doit (cf. fin Q21).