Devoir maison n°5

A rendre pour le mercredi 6 janvier

Problème 1 : Filtrage d'un signal RMN

Description simplifiée de la RMN

La résonance magnétique nucléaire est une propriété de certains noyaux atomiques (possédant un « spin nucléaire » non nul).

Lorsqu'ils sont placés dans un champ magnétique et soumis à un rayonnement électromagnétique de fréquence variable (du domaine des radiofréquences), ils sont susceptibles, si les conditions sont réunies, de rentrer en résonance en absorbant l'énergie du rayonnement (Figure 2). L'énergie mise en jeu dépend de l'intensité du champ magnétique $\vec{B}_0$ appliqué, mais aussi de l'environnement (autres atomes présents) du noyau considéré. Les atomes étudiés par spectroscopie RMN peuvent être aussi bien en phase liquide que solide ou plus rarement gazeuse.

Figure 1. Appareil de spectroscopie RMN (à « 500 MHz »), console de contrôle et armoire électrique (de gauche à droite).

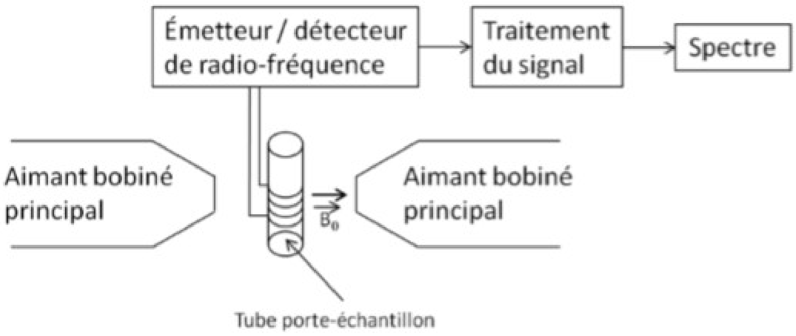


Figure 2. Schéma de principe de la spectroscopie RMN

L'entrée en résonance des atomes placés à l'intérieur de la bobine génère dans le circuit comportant celle-ci une force électromotrice e(t) à la fréquence ω_r du signal radio utilisé.

On étudie dans ce problème le circuit comportant la bobine représenté figure 3 , destiné à filtrer la pulsation de résonance ω_r des atomes.

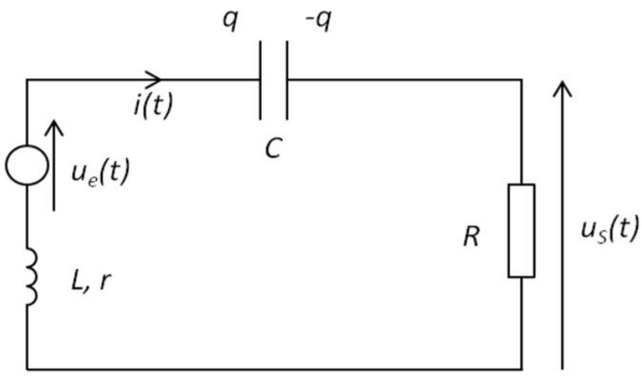


Figure 3 : Circuit RLC de filtrage

On note C la capacité du condensateur, L l'inductance de la bobine, r sa résistance interne, R la résistance d'entrée du détecteur qui ne sera pas étudié ici et on pourra noter $R_{tot} = R+r$ la résistance totale du circuit série.

On étudie la réponse de ce filtre, en régime permanent sinusoïdal, à une excitation notée $u_e(t)=e(t)=\cos(\omega t)$, ω étant une pulsation quelconque. La tension de sortie est $u_s(t)$.

1. En admettant que les dimensions du circuit de filtrage sont inférieures au décimètre et que les fréquences à filtrer sont de l'ordre du MHz, les conditions de validité de l'approximation des régimes quasi-stationnaires sont-elles remplies pour ce circuit ?

2. En étudiant rapidement les comportements limites aux basses et hautes fréquences, déterminer la nature du filtre constitué par ce circuit.

3. Déterminer la fonction de transfert $H(j\omega)=\dfrac{\underline{U_s}}{\underline{U_e}}$ en fonction de *R, r* ,(ou R_{tot}), *L*, *C* et ω .

4. Montrer que $\boldsymbol{H(j\omega)=\dfrac{a}{1+jb(s-\frac{1}{s})}}$ avec $s=\omega\sqrt{LC}$, $a=\dfrac{R}{R_{tot}}$ et où *b* est une constante à déterminer.

5. <u>Étude du maximum de la fonction de transfert :</u>

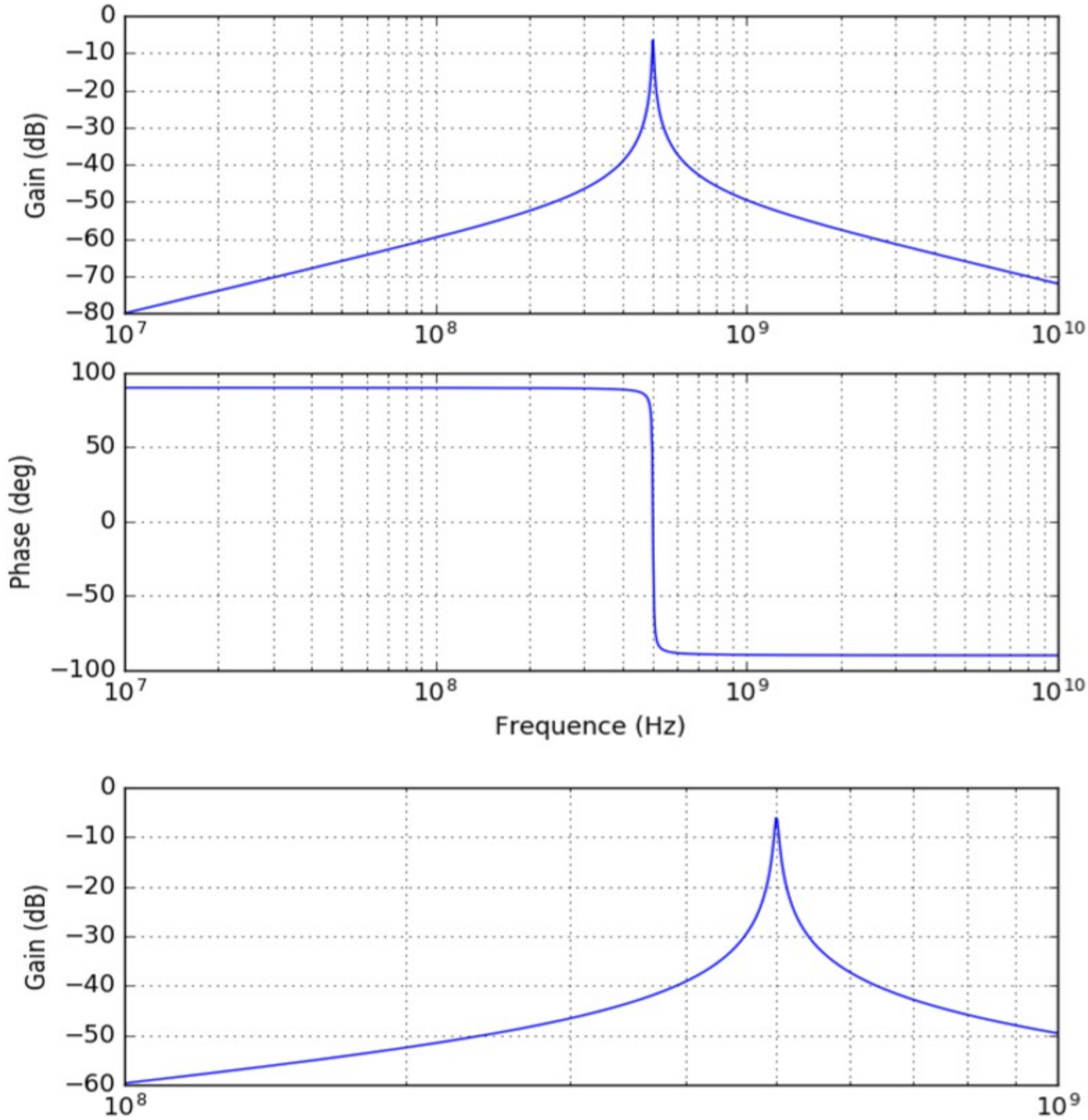
a) Exprimer $|\underline{H}|$, quelle est sa signification physique? Quelle est sa valeur maximum H_{max} ? Quelle est la valeur s_0 de s correspondante ? En déduire la pulsation ω_0 de ω correspondante.

b) Déterminer l'écart $\Delta\omega$ entre les deux pulsations dites de coupure telles que $|\underline{H}|=\dfrac{H_{max}}{\sqrt{2}}$. Exprimer votre résultat en fonction de ω_0 *et b* .

c) On caractérise l'acuité de ce filtre par le quotient $Q=\dfrac{\omega_0}{\Delta\omega}$, nommé facteur de qualité du filtre (ou aussi coefficient de surtension propre). Exprimer *Q* en fonction de R_{tot} , *L* et *C*.

6. <u>Le diagramme de Bode correspondant à la fonction $\underline{H}(j\omega)$ est donné ci-dessous en figure 4.</u>

Figure 4 : Diagramme de Bode (simulé) du circuit de filtrage, avec zoom du gain en dessous



a) Interpréter le diagramme de Bode de ce circuit d'après la fonction de transfert obtenue précédemment.

b) Quelle est la valeur du gain (en dB) aux pulsations de coupure ?

Le circuit est dit accordable, ce qui signifie que l'on peut faire varier la capacité du condensateur de telle sorte que l'on puisse atteindre l'égalité $\omega_0 = \omega_r$ désignant la fréquence de résonance des atomes.

7. Expliquer l'intérêt de cette opération d'accord.

8. <u>Valeur des composants du modèle électrique</u>

a) Déterminer graphiquement f_0 . En supposant Q = 100 et R_{tot} de l'ordre de l'ohm, calculer les valeurs de L et de C.

b) Commenter ces résultats.

9. <u>Étude du courant :</u>

a) Établir l'équation différentielle vérifiée par l'intensité *i(t)* du courant définie dans le circuit de la figure 3. En déduire que l'équation différentielle vérifiée par *i(t)* peut se mettre sous la forme : $\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{d\,i(t)}{dt} + \omega_0^2 i(t) = \frac{1}{L}\frac{du_e(t)}{dt}$

b) En tenant compte de la valeur de Q, montrer que la solution générale de l'équation homogène associée peut être approximée par l'expression suivante : $i_h(t) = e^{\frac{-\omega_0}{2Q}t}[A\cos(\omega_0)t + B\sin(\omega_0)t]$

10. On cherche à tester le circuit en régime transitoire.

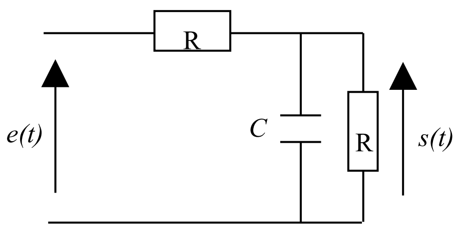
Pour tout t < 0, $u_e(t) = 0$ et le condensateur totalement déchargé. Pour t > 0, $u_e(t) = E$

a) Déterminer $i(0^+)$ et $\frac{d\,i}{d\,t}(0^+)$

b) En déduire *i(t)* et tracer *i(t)*.

Problème 2 : Étude d'un élément de radiotélescope

<u>Le filtrage</u>



On utilise le filtre suivant :

1. En effectuant un schéma équivalent en BF (basse fréquence), puis un autre en (haute fréquence) HF , déterminer sans calcul le type de ce filtre.

2. Déterminer la fonction de transfert $\underline{H}(jx) = \frac{\underline{U_s}}{\underline{U_e}}$ où $x = RC\omega$.

3. Déterminer sa pulsation de coupure ω_c en fonction de *R* et C.

4. On a tracé en annexe le diagramme de Bode en gain de ce filtre. Déterminer un ordre de grandeur du produit *RC.*

5. En haute fréquence, pourquoi parle-t-on d'une intégration ?Comment vérifie-t-on cette propriété sur le diagramme de Bode en gain ? Vers quelle valeur tend alors le déphasage de *s(t)* par rapport à *e(t) ?*

<u>Le mélangeur</u>

On place à l'entrée de ce filtre le signal : $e(t) = M[\cos(2\pi f t + \phi_0) + \cos(2\pi f' t + \phi_0)]$ *avec f=30Hz et f'=2870Hz.*

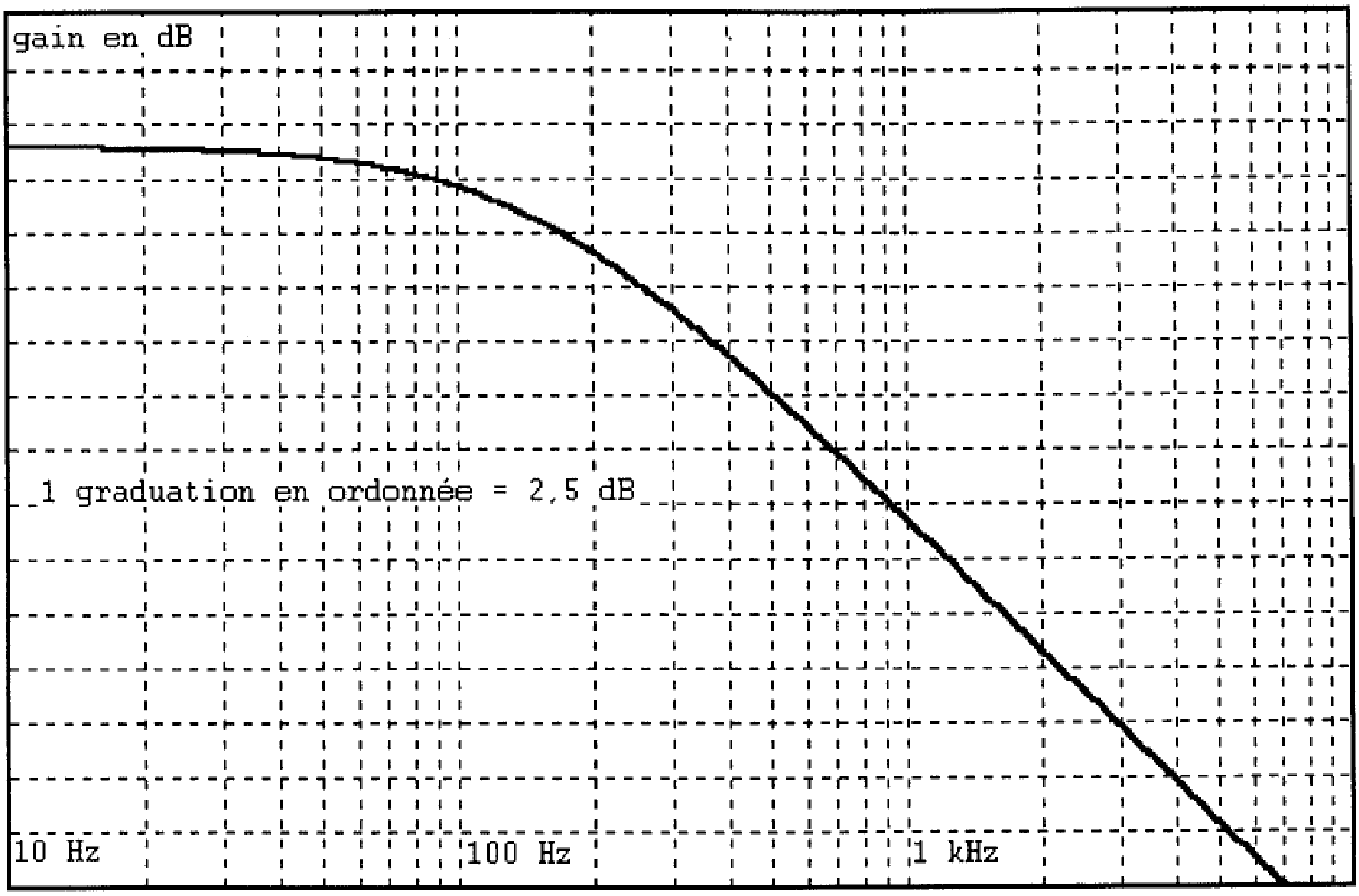
La sortie est alors $s(t) = S\cos(2\pi f t + \phi_s) + S'\cos(2\pi f' t + \phi'_s)$.

6. Déterminer la valeur numérique de $\frac{S}{S'}$ à partir du diagramme de Bode en expliquant votre démarche par des tracés clairs sur le diagramme.

Nom prénom :

Annexe : Diagramme de Bode du problème 2

A rendre avec la copie



Fin de l'énoncé