

Devoir maison n°6 sciences physiques

Travail en autonomie

Problème I : Détermination de la composition isotopique du chlore

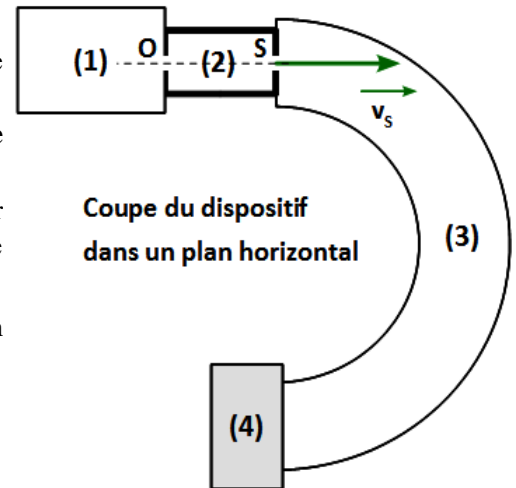
A l'état naturel, le chlore existe principalement sous forme de deux isotopes : ^{35}Cl et ^{37}Cl . Le but de ce problème est de déterminer sa composition isotopique grâce à un spectrographe de masse.

Les vitesses intervenant dans le problème sont suffisamment faibles pour que les lois de la mécanique classique soient applicables.

Principe de fonctionnement du spectrographe de masse:

Il est constitué de trois chambres (1), (2) et (3) où règne un vide très poussé.

- Des ions sont produits dans la **chambre d'ionisation** (1) avec une vitesse négligeable.
- A travers une première fente, les ions produits pénètrent en O dans la **chambre d'accélération** où ils sont accélérés par une tension $U > 0$.
- Ils ressortent par une deuxième fente en S avec une vitesse $\vec{v}_S$ dépendant de leur masse et pénètrent dans la **chambre de déviation** où règne un champ magnétique uniforme et permanent orthogonal à $\vec{v}_S$.
- Les particules sont ensuite recueillies par un **détecteur** (4) sensible à la position et à l'intensité du flux de particules.



Étude générale pour un ion de charge $q > 0$:

1. Faire un schéma de la chambre d'accélération, représenter le vecteur champ électrique $\vec{E}$ régnant dans l'enceinte. Exprimer U en fonction de V_O et V_S les potentiels respectifs en O et en S .

Établir grâce au théorème de l'énergie cinétique l'expression de la vitesse v_s d'un ion de charge $q > 0$ et de masse m à la sortie de la chambre d'accélération.

2. Dans la chambre de déviation :

2.1. Quelle est la nature de la trajectoire de l'ion ?

2.2. Déterminer le sens de $\vec{B}$ pour que l'ion puisse atteindre le détecteur.

2.3. Montrer que le mouvement de l'ion est uniforme.

2.4. Déterminer soigneusement le rayon R de sa trajectoire en fonction de m , v_s , q et B puis en fonction de m , U , q et B .

Applications aux ions $^{35}\text{Cl}^+$ et $^{37}\text{Cl}^+$

Les ions $^{35}\text{Cl}^+$ et $^{37}\text{Cl}^+$ respectivement de masse m_1 et de masse m_2 sont produits dans la chambre d'ionisation à partir d'un échantillon de chlore naturel.

3. Faire un schéma de la chambre de déviation et représenter les trajectoires respectives de rayons R_1 et R_2 des ions $^{35}\text{Cl}^+$ et $^{37}\text{Cl}^+$.

4. Les ions sont accélérés sous une tension $U = 500 \text{ V}$. Déterminez le module B du champ magnétique pour que les ions $^{35}\text{Cl}^+$ viennent frapper le détecteur en A_1 à $40,00 \text{ cm}$ de l'endroit où ils pénètrent dans la chambre de déviation.

5. Déduire à quelle distance d de A_1 se trouve le lieu d'impact A_2 des ions $^{37}\text{Cl}^+$ accélérés sous la même tension.

6. Pour un intervalle de temps donné, les quantités d'électricité reçues par le détecteur pour $^{35}\text{Cl}^+$ et $^{37}\text{Cl}^+$ sont respectivement: $Q_1 = 6,667 \cdot 10^{-8} \text{ C}$ et $Q_2 = 2,132 \cdot 10^{-8} \text{ C}$. Déterminer la composition isotopique du chlore et sa masse molaire moyenne M .

Données numériques :

- masse des ions $^{35}\text{Cl}^+$: $m_1 = 34,968 \text{ u}$.
- masse des ions $^{37}\text{Cl}^+$: $m_2 = 36,965 \text{ u}$.
- L'unité de masse atomique : $1 \text{ u} = 1,66054 \times 10^{-27} \text{ kg}$
- Nombre d'Avogadro $N_A = \frac{10^{-3}}{1 \text{ u}} = 6,02214 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.
- Charge élémentaire : $1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

Problème 2 : NASA's Mars Exploration Program

Un demi-siècle après avoir marché sur la Lune, l'exploration spatiale semble se fixer à moyen terme l'objectif de l'exploration de la planète Mars par l'homme. Une telle expédition suppose de résoudre un très grand nombre de problèmes concernant aussi bien les aspects techniques que les aspects humains. Ce sujet propose d'étudier l'un des nombreux scénarios élaborés par la NASA pour un vol habité vers Mars.

Ce problème est accompagné d'un document réponse à rendre avec la copie. Les principales données numériques sont regroupées à la fin de l'énoncé du problème.

Dans tout le problème, les orbites des planètes autour du Soleil sont assimilées à des cercles de rayon égal au demi-grand axe a des ellipses.

On se place dans le référentiel héliocentrique $R(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ supposé galiléen.

La question 13 est plus difficile, Elles nécessitent plus de temps pour élaborer un modèle ou un raisonnement, le barème en tient compte.

I. Vitesse de la Terre et de Mars dans le référentiel héliocentrique

Q 1. Exprimer et représenter la force de gravitation exercée par le soleil sur un objet M de masse m en introduisant les paramètres nécessaires. Donner les dimensions de la constante gravitationnelle G ainsi que son unité dans le système international.

Q 2. Montrer que le moment cinétique $\vec{L}_O(M)$ en O , centre du Soleil, de l'objet M de masse m est une constante du mouvement.

Q 3. On utilise la base de projection cylindrique $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ tel que $\vec{L}_O(M) = L_O \vec{u}_z$. Justifier que le mouvement de M est plan, quel est ce plan ? Etablir l'expression de $C = r^2 \frac{d\theta}{dt}$ en fonction de L_O et m . Quel est le nom de cette grandeur, quelle est sa particularité?

Q 4. Grâce à la 2^{ème} loi de Newton, déterminer, dans le cas d'une orbite circulaire de rayon R , la vitesse V de l'objet en fonction de G , M_S , R et m . Calculer les valeurs numériques de V_T , la vitesse orbitale de la Terre et de V_M , celle de Mars, dans le référentiel héliocentrique.

II Aspect énergétique et troisième loi de Kepler

Q 5. Dédurre l'expression de l'énergie cinétique, puis de l'énergie mécanique de l'objet de masse m sur son orbite circulaire autour du Soleil en fonction de G , M_S , R et m .

Q 6. Exprimer la période de rotation T de l'objet en fonction G , M_S et R (troisième loi de Kepler). Il est rappelé que les expressions de l'énergie mécanique et de la troisième loi de Kepler obtenues pour un mouvement circulaire peuvent être généralisées au cas d'une orbite elliptique en remplaçant le rayon R par le demi-grand axe a de la trajectoire.

III Voyage aller Terre – Mars, orbite de transfert

D'un point de vue énergétique, la méthode la plus efficace pour envoyer un vaisseau d'une orbite circulaire à une autre orbite circulaire coplanaire est de le placer sur une trajectoire de transfert elliptique tangente aux deux orbites circulaires, donc ici aux orbites de Mars et de la Terre (ellipse de Hohmann). On admet que seule l'attraction solaire agit sur le vaisseau pendant son mouvement.

Q 7. Représenter, sur la figure A du document réponse, montrant les orbites de la Terre et de Mars, l'allure de l'orbite de transfert (trajectoire de Hohmann).

La position de la Terre au temps $t = 0$ du départ du vaisseau est prise comme origine angulaire ($\theta(t=0) = 0$).

Q 8. Au départ de l'orbite de la Terre, établir en fonction de V_T , a_M et a_T la vitesse V'_T que doit avoir le vaisseau sur sa trajectoire de transfert. En déduire la variation de vitesse $\Delta V_T = V'_T - V_T$. Calculer la valeur numérique de ΔV_T .

En pratique, la variation de vitesse requise est plus importante en raison de la nécessité de se libérer de l'attraction de la planète à partir d'une orbite basse.

Q 9. Exprimer puis calculer la durée Δt en jours, du voyage jusqu'à l'orbite de Mars.

Q 10. Quel doit être l'angle $\alpha_0 = \theta_M(t=0) - \theta_T(t=0)$ (Terre - Soleil - Mars) formé par les directions de Mars et de la Terre, vus du Soleil, au moment du lancement afin que Mars soit au rendez-vous à l'arrivée du vaisseau ? Calculer la valeur numérique de α_0 en degré et indiquer la position de Mars au moment du lancement sur la figure A du document réponse.

Q 11. Dans l'hypothèse d'un problème survenu pendant le voyage aller nécessitant de ne pas explorer la planète, le vaisseau ne modifie pas sa vitesse lors du passage de l'orbite de Mars. Déterminer la position angulaire de la Terre au bout d'une révolution complète de celui-ci sur son orbite de transfert. Commenter.

IV Durée de la mission

Toujours pour minimiser le coût énergétique, le voyage retour emprunte le même type d'orbite de transfert qu'à l'aller.

Q 12. Déterminer l'angle α_i (Terre - Soleil - Mars) au moment du départ de Mars.

Q 13. En déduire le nombre de jours que les astronautes vont pouvoir passer sur la planète rouge, la durée totale de la mission (en jours) et la période (en jours) entre deux fenêtres de lancement depuis la Terre.

Moyennant une plus grande dépense énergétique, il est possible de modifier ce scénario de mission, et ce en fonction des objectifs voulus (réduction du temps de trajet aller ou retour, modification du temps global de mission en sont des exemples). Ainsi, une variation de vitesse $\Delta \vec{V}_T$ colinéaire à $\vec{V}_T$ plus importante au départ permet de réduire le temps du voyage aller.

Dans la suite, on cherche une réduction de 25 % de l'angle balayé par le vaisseau pour atteindre l'orbite de Mars autour du Soleil. On se place de nouveau avec la position de la Terre au lancement prise comme origine angulaire ($\theta(t=0) = 0$) et on souhaite que le vaisseau atteigne Mars à un instant $\Delta t'$ tel que $\theta_M(\Delta t') = 3\pi/4$. On admet que la nouvelle trajectoire du vaisseau est une conique dont l'un des foyers est le Soleil et d'équation

polaire : $r(\theta) = \frac{p}{1+e \cos \theta}$ où p est appelé paramètre de la conique et e son excentricité.

Q 14. Placer sur la figure B du document réponse la position de Mars à l'arrivée du vaisseau.

Q 15. Justifier que r_P , le périhélie de la trajectoire du vaisseau (distance minimale du Soleil au vaisseau), vérifie $r_P = a_T$.

Q 16. Montrer que l'excentricité s'écrit $e = \frac{a_M - a_T}{\frac{a_M}{\sqrt{2}} + a_T}$ et calculer sa valeur numérique. Tracer sur la figure B l'allure de la

trajectoire.

Q 17. Exprimer l'énergie mécanique E_M du vaisseau sur cette trajectoire en fonction de m , V_T et e .

Q 18. En déduire la vitesse V'_T que doit avoir le vaisseau au départ pour se placer sur sa nouvelle orbite, toujours en fonction de V_T et e .

Q 19. Donner, en fonction de V_T et e , la variation de vitesse $\Delta V'_T = V'_T - V_T$ qu'il faut communiquer au vaisseau pour le mettre sur sa nouvelle trajectoire de transfert. Calculer la valeur numérique de $\Delta V'_T$.

Q 20. Exprimer $C = r^2 \frac{d\theta}{dt}$ en fonction de a_T et V'_T .

Q 21. Évaluer le temps $\Delta t'$ du transfert entre la Terre et Mars.

On donne : $\int_0^{\theta_M(\Delta t')} \frac{1}{(1+e \cos \theta)^2} d\theta = 2,15$ avec l'excentricité calculée en question 16.

Données numériques

Masse du Soleil

$$M_S = 2,00 \times 10^{30} \text{ kg}$$

Demi-grand axe de l'orbite de la Terre

$$a_T = 150 \times 10^6 \text{ km}$$

Demi-grand axe de l'orbite de Mars

$$a_M = 228 \times 10^6 \text{ km}$$

Constante gravitationnelle

$$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ SI}$$

Champ de pesanteur terrestre

$$g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$

Période de révolution de la Terre

$$T_T = 365 \text{ jours}$$

Période de révolution de Mars

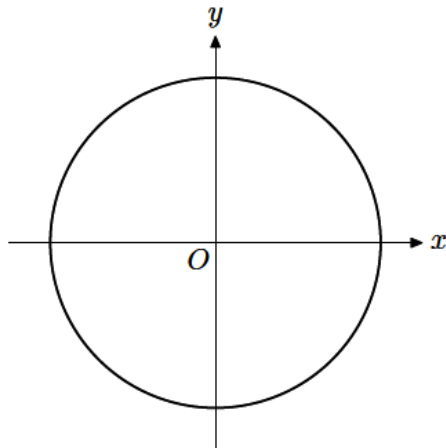
$$T_M = 687 \text{ jours}$$

Formulaire

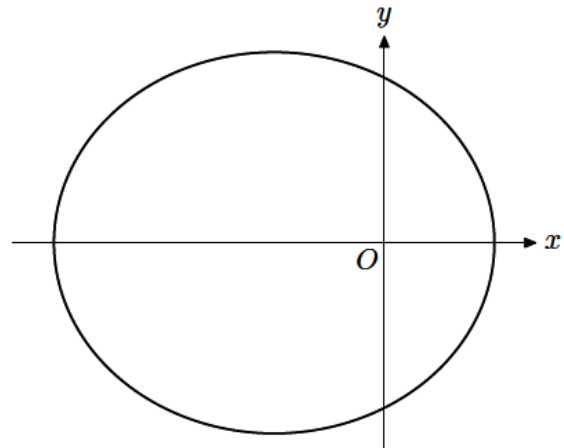
L'équation polaire d'une conique d'axe focal (Ox), de paramètre p et d'excentricité e s'écrit

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

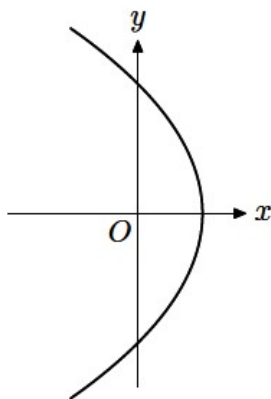
La nature de la courbe dépend de l'excentricité. On distingue 4 cas.



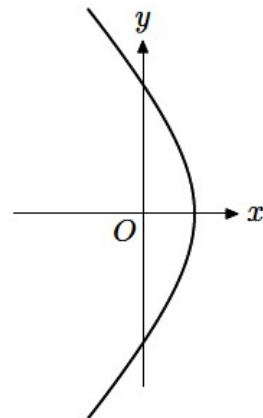
$e = 0$, la courbe est un cercle



$0 < e < 1$, la courbe est une ellipse



$e = 1$, la courbe est une parabole



$e > 1$, la courbe est une hyperbole

Nom Prénom : _____

Questions 7 et 10

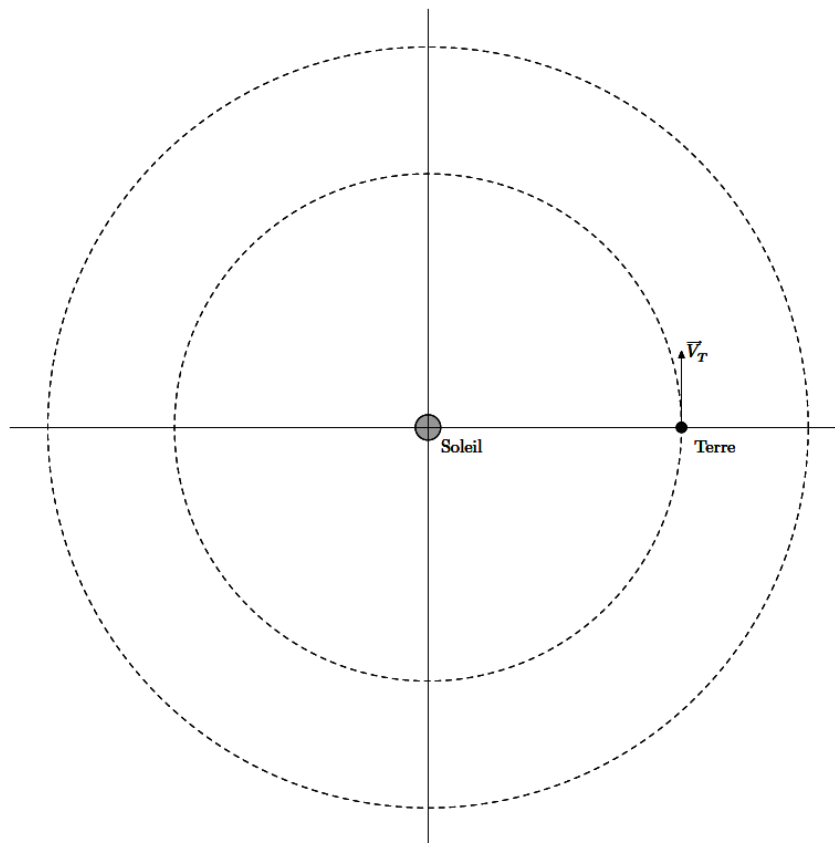


Figure A

Questions 14 et 16

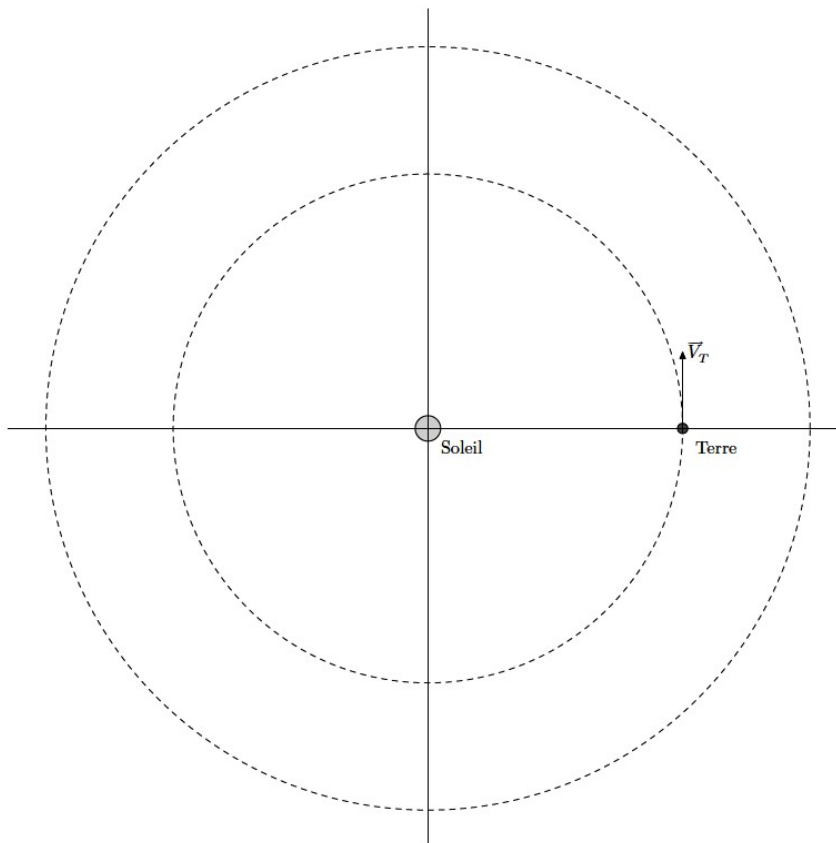


Figure B

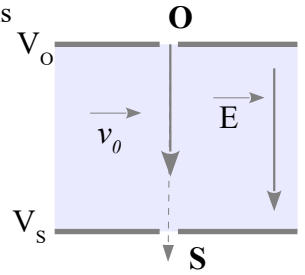
Correction devoir maison sciences physiques n°6

Problème 1 : Détermination de la composition isotopique du chlore

1. $U = V_O - V_S > 0$ car le **champ électrique accélérateur** orienté de O vers S est dans le sens des potentiels décroissants.

On applique le théorème de l'énergie cinétique à l'ion entre O et S.

$$\frac{1}{2} m v_s^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = W_{\vec{F}_E} O \rightarrow S = q V_O - q V_S = q U \text{ d'où } \boxed{v_s = \sqrt{2 \frac{qU}{m}}} \text{ car } v_0 \ll v_s.$$



2. Dans la chambre de déviation :

2.1. La trajectoire des ions est circulaire.

2.2. La force magnétique est donnée par la relation : $\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$ en S elle doit être orientée vers le centre de courbure on en déduit que **$\vec{B}$ doit être orienté vers le haut.**

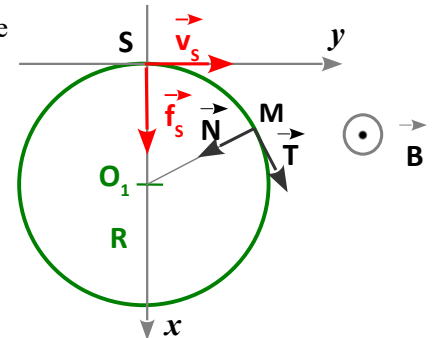
2.3. Pour montrer que le mouvement est uniforme on applique le théorème de la puissance cinétique à la particule dans $\vec{B}$: $\frac{dE_c}{dt} = \vec{F}_B \cdot \vec{v} = (q \vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0$. On en déduit que $E_c = \text{cste}$ d'où $\|\vec{v}\| = \text{constante} = v_s$.

Le champ magnétique dévie les particules mais ne modifie pas la norme de leur vitesse .

2.4. Soit O_1 , le centre de la trajectoire. Dans le référentiel terrestre de repère d'espace $R(O_1, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, on exprime la vitesse et l'accélération

de la particule dans la base de Frenet **au cours du mouvement**: $\vec{v} = v_s \vec{T}$ et

$$\vec{a} = \frac{v_s^2}{R} \vec{N}. \text{ La force magnétique est : } \vec{F}_b = q \vec{v} \wedge \vec{B} = q v_s \vec{T} \wedge B \vec{u}_z = q v_s B \vec{N}$$



D'après la 2^{ème} loi de Newton : $m \vec{a} = \vec{F}_B$ d'où $m \frac{v_s^2}{R} = q v_s B$.

On obtient ainsi : $\boxed{R = \frac{m v_s}{q B}}$ en remplaçant v_s par son expression obtenue à la

question 1. On obtient : $\boxed{R = \frac{m}{q B} \sqrt{2 \frac{qU}{m}} = \frac{1}{B} \sqrt{2 m U}}$

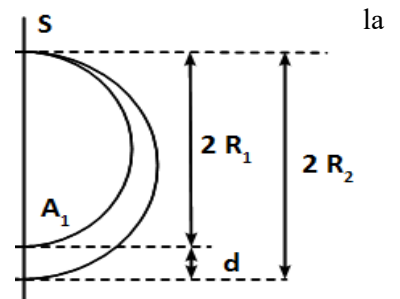
3. D'après la question précédente, on voit que le rayon de la trajectoire augmente avec la masse donc $R_2 > R_1$. D'où la représentation des 2 trajectoires :

4. $SA_1 = 2R_1$ donc $R_1 = 20 \text{ cm}$. De la question précédente on tire $B = \frac{1}{R_1} \sqrt{2 m_1 U}$ d'où

$$B = \frac{1}{20 \cdot 10^{-2}} \sqrt{2 \times 34,968 \times 1,66054 \cdot 10^{-27} \times 500} \text{ d'où } \boxed{B = 95,3 \text{ mT}}$$

5. D'après la question 2.4. $\frac{R_2}{R_1} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$ on en déduit : $R_2 = R_1 \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$ d'où

$$R_2 = 20 \sqrt{\frac{36,965}{34,968}} = 20,56 \text{ cm} \quad \boxed{d = 2(R_2 - R_1) = 2(20,56 - 20,00) = 1,13 \text{ cm}}$$



6. Pour ^{35}Cl , le pourcentage isotopique est $P_1 = \frac{Q_1}{Q_1 + Q_2} \times 100$ soit :

$$P_1 = \frac{6,667}{6,667 + 2,132} \times 100 = 75,77\% \text{ et } P_2 = \frac{2,132}{6,667 + 2,132} \times 100 = 24,23\% \text{ pour } ^{37}\text{Cl}$$

La masse molaire moyenne du chlore est donc : $\boxed{M = 34,968 \times 0,7577 + 36,965 \times 0,2423 = 35,45 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}}$

Problème 2 : NASA's Mars Exploration Program (concours centrale PC 2022)

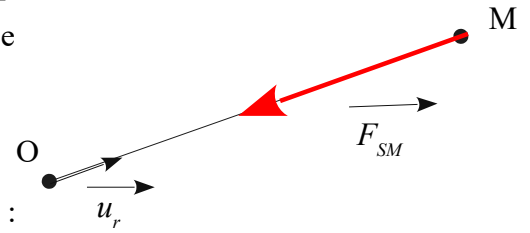
I Vitesse de la Terre et de Mars dans le référentiel héliocentrique

1. La force exercée par le soleil (point O) sur un objet M de masse

m est :
$$\vec{F}_{SM} = \frac{-G M_S m}{r^2} \vec{u}_r$$

$[G] = \frac{[F][r^2]}{[M_S][m]} = \frac{MLT^{-2}L^2}{M^2}$ d'où les dimensions de G :

$[G] = L^3 M^{-1} T^{-2}$ et son unité dans le système international : $m^3 kg^{-1} s^{-2}$.



2. On applique le théorème du moment cinétique en O à l'objet M dans le référentiel héliocentrique:

$$\frac{d\vec{L}_O(M)}{dt} = \vec{M}_O(\vec{F}_{SM}) = \vec{OM} \wedge \vec{F}_{SM} = r\vec{u}_r \wedge \frac{-G M_S m}{r^2} \vec{u}_r = \vec{0}$$
. On en déduit que $\vec{L}_O(M) = \vec{OM} \wedge m\vec{v} = \text{cste}$.

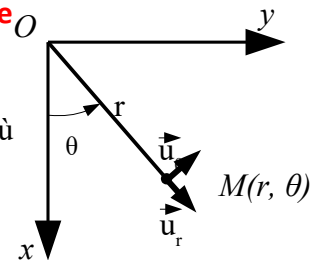
3. A tout moment $\vec{OM}$ est orthogonal au moment cinétique. Or le moment cinétique est à tout moment suivant $\vec{u}_z$ donc $\vec{OM}$ est contenu dans le plan (O,x,y) à tout moment.

Conclusion : le mouvement est plan et le plan du mouvement est (O,x,y). Dans le plan, on repère le point M grâce à ses coordonnées polaires.

On repère le point M grâce à ses coordonnées polaires (r, θ) :

$\vec{OM} = r\vec{u}_r$ et $\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ d'où $\vec{L}_O(M) = \vec{OM} \wedge m\vec{v} = r\vec{u}_r \wedge m(\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta)$ d'où

$$\vec{L}_O(M) = mr^2\dot{\theta}\vec{u}_z = mC\vec{u}_z$$
 d'où $C = \frac{L_O}{m}$.



C est la constante des aires, c'est une constante du mouvement.

4. La trajectoire étant circulaire, $r=R = \text{cste}$ d'où $\vec{V} = V\vec{u}_\theta = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ et $\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{u}_R + R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta = \frac{-V^2}{R}\vec{u}_R + \frac{dV}{dt}\vec{u}_\theta$.

D'après la 2^{ème} loi de Newton appliquée à l'objet dans le référentiel héliocentrique : $m\vec{a} = \vec{F}_{SM}$. Par projection

sur $\vec{u}_R$, on en déduit que $-m\frac{V^2}{R} = \frac{-G M_S m}{R^2}$ $V = \sqrt{\frac{G M_S}{R}}$.

AN : $V_T = \sqrt{\frac{G M_S}{R_T}} = 2,98.10^4 m.s^{-1}$ ($R_T = a_T$) et $V_M = \sqrt{\frac{G M_S}{R_M}} = 2,42.10^4 m.s^{-1}$ ($R_M = a_M$).

II Aspect énergétique et 3^{ème} loi de Kepler

5. $E_C = \frac{1}{2}mV^2 = \frac{GmM_S}{2R}$; $E_P = \frac{-G M_S m}{R}$ d'où $E_m = E_C + E_P = \frac{-G M_S m}{2R}$.

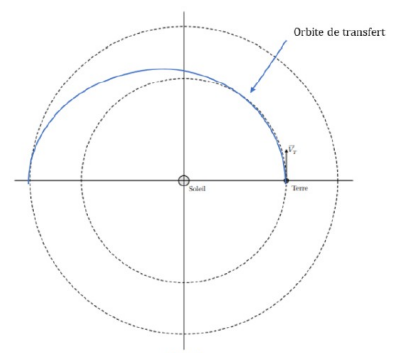
6. La vitesse sur la trajectoire circulaire étant constante, $T = \frac{2\pi R}{V}$ d'où $T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{G M_S}}$.

III Voyage aller Terre-Mars, orbite de transfert

7. ci-contre.

8. Le demi grand axe de l'orbite de transfert est a telle que : $2a = a_T + a_M$.

L'énergie de l'objet sur l'orbite de transfert est $E_m = \frac{-G M_S m}{2a} = \frac{-G M_S m}{a_T + a_M}$ or



$$E_m = E_C + E_P = \frac{1}{2} m V_T'^2 - \frac{GM_S m}{a_T} = \frac{-GM_S m}{a_T + a_M} \text{ d'où } \frac{1}{2} m V_T'^2 - \frac{GM_S m}{a_T} = \frac{-GM_S m}{a_T + a_M} \text{ d'où}$$

$$V_T'^2 = 2GM_S \left(\frac{1}{a_T} - \frac{1}{a_T + a_M} \right) \text{ d'où}$$

$$V_T' = \sqrt{2GM_S \left(\frac{a_M}{a_T(a_T + a_M)} \right)} \text{ or } V_T = \sqrt{\frac{GM_S}{R_T}} = \sqrt{\frac{GM_S}{a_T}} \text{ d'où } V_T' = V_T \sqrt{\frac{2a_M}{a_T + a_M}} . \text{ On en déduit :}$$

$$\Delta V_T = V_T' - V_T = V_T \left(\sqrt{\frac{2a_M}{a_T + a_M}} - 1 \right) . \text{ AN : } \Delta V_T = 2,93.10^3 \text{ m.s}^{-1} .$$

9. La durée Δt du voyage est égale à la demi-période de révolution sur la trajectoire elliptique de demi grand axe :

$$a = \frac{a_T + a_M}{2} . \text{ On détermine la période grâce à la 3}^{\text{ème}} \text{ loi de Képler : } T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM_S}} = 2\pi \sqrt{\frac{(a_T + a_M)^3}{8GM_S}} \text{ d'où}$$

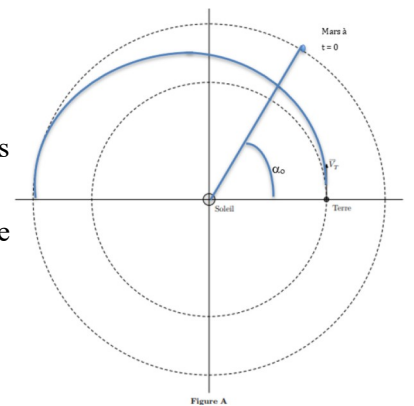
$$\Delta t = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{(a_T + a_M)^3}{2GM_S}} . \text{ AN : } \Delta t = 2,23.10^7 \text{ s} = 259 \text{ jours} .$$

10. La période de révolution de Mars est $T_M = \frac{2\pi R_M}{V_M}$. Pendant l'intervalle de temps

Δt , Mars parcourt la distance $d_M = V_M \Delta t = \frac{2\pi R_M \Delta t}{T_M} = R_M \Delta \theta_M$ d'où l'angle

parcouru : $\Delta \theta_M = \frac{2\pi \Delta t}{T_M}$. On en déduit : $\alpha_0 = \pi - \Delta \theta_M = \pi - \frac{2\pi \Delta t}{T_M}$.

AN : $\alpha_0 = \pi - \frac{2\pi \times 259}{687} = 0,773 \text{ rad} = 44,3^\circ$.



11. Pendant la période de révolution $T = 2\Delta t$ du vaisseau , la terre parcourt l'angle $\Delta \theta_T = \frac{4\pi \Delta t}{T_T}$. AN :

$$\Delta \theta_T = \frac{4\pi \times 259}{365} = 8,92 \text{ rad} = 511^\circ . \text{ La terre a fait plus d'un tour l'angle correspondant est}$$

$$\theta_T = 511 - 360 = 151^\circ . \text{ Le vaisseau ne pourra pas se poser sur la terre !}$$

IV Durée de la mission

12. Le voyage retour à la même durée que le voyage aller. Pendant ce trajet la terre parcourt l'angle $\Delta \theta_T = \frac{2\pi \Delta t}{T_T}$ soit

$$\Delta \theta_T = \frac{2\pi \times 259}{365} = 4,46 \text{ rad} = 255^\circ . \text{ L'angle } \alpha_1 = 255 - 180 = 75,5^\circ .$$

13. Soit $t=0$, l'instant du lancement de l'orbite terrestre. L'angle entre la terre et mars est : $\alpha(t) = \alpha_0 + \frac{2\pi t}{T_M} - \frac{2\pi t}{T_T}$. La mission sur Mars se termine à l'instant t_1 tel que $\alpha(t_1) = \alpha_1 + 2n\pi$ avec n un entier relatif.

Rem : le Terre tournant plus vite que Mars, l'angle $\alpha(t)$ va rapidement devenir négatif donc n sera négatif.

On en déduit : $t_1 = \frac{\alpha_1 - \alpha_0 + 2n\pi}{\frac{2\pi}{T_T} - \frac{2\pi}{T_M}}$. La première valeur positive de t_1 est obtenue pour $n=-1$.

$t_1 = 712 \text{ J}$. On doit soustraire la durée du voyage aller, donc la durée de la mission sur Mars est :

$\Delta t_{\text{Mars}} = 712 - 259 = 453 \text{ jours}$. La durée totale de la mission est $\Delta t_{\text{totale}} = 712 + 259 = 970 \text{ jours}$. La

période $\Delta t_{attente}$ entre deux fenêtres de lancement est telle que : $\Delta t_{attente}(\omega_T - \omega_M) = 2\pi$ soit

$$\Delta t_{attente} = \frac{T_T T_M}{T_M - T_T} = 779 \text{ J}$$

14. Ci-contre

15. L'orbite proposée est une ellipse, et la vitesse initiale est perpendiculaire à l'axe soleil-terre, donc r est un extremum, en l'occurrence un minimum, donc $r_p = a_T$.

Q16. En $\theta = 0$ $r_p = p / (1+e) = a_T$
 En $\theta = 3\pi/4$ $r = p / (1 - e/\sqrt{2}) = a_M$

d'où $e = \frac{a_M - a_T}{\frac{a_M}{\sqrt{2}} + a_T} = \frac{228 - 150}{\frac{228}{\sqrt{2}} + 150} = 0,251$.

L'aphélie se trouve en $\theta = \pi$
 $r_a = p / (1 - e) = a_T (1+e) / (1 - e)$ avec $p = a_T(1+e)$
 $= a_T * 1,251 / 0,749 = 1,67 a_T$

Q17. Pour cette ellipse
 $2a = r_p + r_a = a_T \left(1 + \frac{1+e}{1-e}\right) = a_T \left(\frac{2}{1-e}\right)$
 Et d'après Q8

$E_m = -G \frac{mM_S}{2a} = -ma_T V_T^2 (1-e) / 2a_T = -m V_T^2 (1-e) / 2$
 Avec $GM_S = a_T V_T^2$

Q18 Toujours d'après Q8 en $r = r_p = a_T$ $E_m = E_c(a_T) + E_p(a_T) = \frac{1}{2} m V_T'^2 - G \frac{mM_S}{a_T}$

$= \frac{1}{2} m V_T'^2 (1-e) = \frac{1}{2} m V_T'^2 - m V_T^2$

$V_T' = V_T \sqrt{1+e} = 3,34.10^4 \text{ m.s}^{-1}$

Q19. $\Delta V_T' = V_T' - V_T = V_T(\sqrt{1+e} - 1) = 2,98.10^4.(\sqrt{1+0,251} - 1) = 3,53.10^3 \text{ m.s}^{-1}$

Q20. $C = L_o / m = a_T V_T'$

Q21. $dt = r^2 d\theta / C$ d'où

$\Delta t' = \frac{1}{C} \int_0^{3\pi/4} \frac{a_T^2 (1+e)^2}{(1+e \cos \theta)^2} d\theta = \frac{a_T (1+e)^2}{V_T'} * 2,15 = 150.10^9 \frac{(1+0,251)^2}{3,34.10^4} * 2,15 = 1,51.10^7 \text{ s} = 175 \text{ jours}$

La durée du transfert a été raccourcie de $259 - 175 = 84$ jours.

