Devoir maison n°7 sciences physiques

Ascension d'une montgolfière

Les valeurs des constantes physiques utiles dans les applications numériques sont données à la fin du texte.

Dans tout le problème, le référentiel terrestre est supposé galiléen. Le champ de pesanteur, d'intensité supposée uniforme g, est dirigé suivant l'axe vertical ascendant Oz, et de sens opposé. L'air est considéré comme un gaz parfait. La constante des gaz parfaits est notée R. La masse molaire moyenne de l'air est notée Me, sa pression P, sa température T et sa masse volumique μ. On désigne par P_0, T_0 et μ_0 les valeurs de P, T et μ au niveau du sol (où z = 0).

A. Atmosphère en équilibre

On s'intéresse à l'équilibre de l'atmosphère, dont on adopte un modèle isotherme, de température uniforme T_0.

1. Exprimer la masse volumique de l'air en fonction de P, R, T_0 et Me .

2. Énoncer la loi fondamentale de la statique des fluides dans le champ de pesanteur . En déduire l'expression de la pression $P(z)$ en fonction de P_0, de la hauteur barométrique $H=\dfrac{RT_0}{Me\times g}$ et de l'altitude z.

3. Calculer la valeur numérique de H. A quelle altitude z_{50}^{iso} la pression est elle égale à $\dfrac{P_0}{2}$?

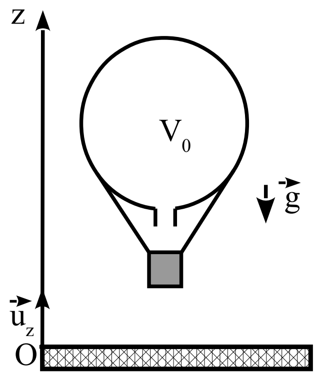
B: Vol d'une montgolfière

On suppose pour cette partie l'équilibre de l'atmosphère isotherme .

La montgolfière utilise de l'air chauffé par un foyer situé sous le ballon , le ballon est ouvert à la base , ce qui fait qu'à tout instant la pression intérieure à l'enveloppe est égale à la pression de l'air situé à l'extérieur .

On note:

- *M_0 la masse de l'équipement (et éventuellement de l'équipage) constituant l'aérostat (nacelle, enveloppe, appareils de mesure..., gaz exclus).*
- *V_0 le volume de l'enveloppe contenant le gaz . On néglige le volume de l'équipement devant V_0.*



L'enveloppe de la montgolfière contient de l'air à la température T_1 maintenue constante. A l'altitude z la montgolfière est soumise à la résultante des forces: $\boldsymbol{(F(z)-M_0 g)\vec{u}_z+\vec{f}}$ où $\vec{f}$ est la force de frottement due au mouvement dans l'air et F(z) la force ascensionnelle.

4. En faisant le bilan des forces exercées sur la montgolfière, montrer que la force ascensionnelle s'écrit: $\boldsymbol{F(z)=\dfrac{P(z)V_0 Me\, g}{R}\left(\dfrac{1}{T_0}-\dfrac{1}{T_1}\right)}$. Comment varie F(z) avec l'altitude?

5. La température maximale admissible pour l'air contenue dans l'enveloppe est t_{1max}=150°C. En déduire l'expression du volume minimal de l'enveloppe V_{0min} en fonction de M_0, R, P_0, M_e T_0 et T_{max} pour que la montgolfière puisse décoller. Calculer V_{0min}.

6. L'enveloppe du ballon a un volume V_0=1000m^3

a) On suppose que la température de l'air dans l'enveloppe est égale à t_{1max} . Calculer la masse d'air m_0 dans le ballon et la force ascensionnelle F_0 au décollage . Établir l'expression de l'accélération initiale a_0 subie par la montgolfière au décollage en fonction de m_0, M_0, g et F_0 . Faire l'application numérique.

b) Exprimer en fonction de H, M_0, V_0, R, P_0, M_e , T_0 et T_1 l'altitude plafond z_{max} , définie comme l'altitude à laquelle la force ascensionnelle est égale au poids M_0g.

c) Calculer l'altitude plafond pour la température t_{1max} .

<u>Valeurs numériques utiles :</u>

Constante des gaz parfaits : R = 8,31 J.K^{-1}.mol^{-1},

Accélération de la gravité à la surface de la Terre : g = 9,81 m.s^{-2}

Masse molaire de l'air: M_e = 29,0 g.mol^{-1} ; M_0 = 300 kg ; T_0 = 288K ; P_0=1,013.10^{5}Pa ; T(K) = t(°C) + 273

Solution : d'après mines-ponts 2008

1. En utilisant l'équation d'état des gaz parfaits, on obtient : $\mu=\frac{PM_e}{RT_0}$.

2. Principe fondamental de la statique des fluides dans le cas d'un axe ascendant : $dP=-\mu g dz$

En remplaçant $\mu(z)$, on obtient : $dP=\frac{-P(z)M_e}{RT_0}gdz$.

Par séparation des variables on obtient : $\frac{dP}{P(z)}=\frac{-M_e g}{RT_0}dz$. Par intégration en posant P_0 la pression au niveau du sol en z=0, on obtient : $\boxed{P(z)=P_0\exp(\frac{-M_e gz}{RT_0})=P_0 e^{\frac{-z}{H}}}$.

3. $\boxed{H=\frac{RT_0}{Me\times g}=\frac{8{,}31\times 288}{29.10^{-3}\times 9{,}81}=8413\,m}$, $P=\frac{P_0}{2}=P_0 e^{\frac{-z_{50}^{iso}}{H}}$ $\boxed{z_{50}^{iso}=H\ln 2=5831\,m}$.

4. Bilan des forces appliqué à la mongolfière:

Poids du ballon : $\vec{p}=-(M_0+m_{air}^{int}(z))g\vec{u}_z=-(M_0+\frac{P(z)M_e}{RT_1}V_0)g\vec{u}_z$

Poussée d'Archimède : $\vec{\pi}=(\frac{P(z)M_e}{RT_0}V_0)g\vec{u}_z$.

Force de frottement : $\vec{f}$

Résultante des forces : $\vec{R}=\vec{p}+\vec{\pi}+\vec{f}=-(M_0+\frac{P(z)M_e}{RT_1}V_0)g\vec{u}_z+(\frac{P(z)M_e}{RT_0}V_0)g\vec{u}_z+\vec{f}$

par identification : $F(z)=\frac{P(z)V_0 Me\,g}{R}(\frac{1}{T_0}-\frac{1}{T_1})$. La pression diminue avec l'altitude F(z) aussi.

5. Au décollage l'air n'est pas encore en mouvement ainsi $\vec{f}=0$. Pour que la mongolfière puisse décoller, il faut que $F(0)>M_0 g$ soit $\frac{P_0 V_0 M_e}{R}(\frac{1}{T_0}-\frac{1}{T_{1max}})>M_0$ soit $\boxed{V_0>\frac{RM_0}{P_0 M_e(\frac{1}{T_0}-\frac{1}{T_{1max}})}=V_{0min}}$

AN : $\boxed{V_{0min}=766\,m^3}$

6. L'enveloppe du ballon vaut $V_0=1000\text{m}^3$:

a) $\boxed{m_0=\mu(T_{1max})V_0=\frac{P_0 M_e}{RT_{1max}}V_0=836\,kg}$. $\boxed{F_0=\frac{P_0 V_0 Me\,g}{R}(\frac{1}{T_0}-\frac{1}{T_{1max}})=3843\,N}$.

Au décollage d'après la 2ème loi de Newton : $(m_0+M_0)\vec{a}_0=(F_0-M_0 g)\vec{u}_z$.

AN : $\boxed{a_0=\frac{F_0-M_0 g}{m_0+M_0}=0{,}773\,m.s^{-2}}$.

b) $F(z_{max})=M_0 g$ soit $\frac{P(z_{max})V_0 M_e g}{R}(\frac{1}{T_0}-\frac{1}{T_1})=M_0 g$ soit $\frac{P_0 e^{-\frac{z_{max}}{H}}V_0 M_e}{R}(\frac{1}{T_0}-\frac{1}{T_1})=M_0$. D'ou :

$\boxed{z_{max}=H\ln[\frac{P_0 V_0 M_e}{RM_0}(\frac{1}{T_0}-\frac{1}{T_1})]}$.

c) . AN : $\boxed{z_{max}=2244\,m}$