Devoir Maison 17 - correction partielle

On considère $f_4 : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ P \longmapsto \big(P(-1), P(0), P(1)\big) \end{array} \right.$.

1. En réfléchissant sur les dimensions, dire si f_4 est surjective, injective, ou rien du tout.

   f_4 opère d'un espace de dimension 4 vers un espace de dimension 3, f_4 est peut-être surjective mais elle ne peut pas être injective (et donc pas bijective).

2. Déterminer le noyau et l'image de f_4.

   Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. On a :

   $$P \in \text{Ker } f_4 \Longleftrightarrow f_4(P) = 0_{\mathbb{R}^3} \Longleftrightarrow (P(-1), P(0), P(1)) = (0, 0, 0)$$

   Le polynôme P admet $-1, 0$ et 1 comme racines si, et seulement si, il est divisible par $(X+1)X(X-1)$.
   Or, P est de degré inférieur ou égal à 3, P est donc de la forme $\lambda((X+1)X(X-1)$.
   Finalement, Ker f_4Vect$((X+1)X(X-1))$.

   Le Théorème du Rang nous dit que dim $\mathbb{R}_3[X] = \dim(\text{Ker } f_4) + \dim(\text{Im } f_4)$; on en déduit dim (Im $f_4) = 3$.
   Or, Im f_4 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, qui n'admet qu'un seul sous-espace de dimension 3 : $\mathbb{R}^3$ lui-même. Finalement, Im $f_4 = \mathbb{R}^3$.

3. Décider si f_4 est injective, surjective, bijective, ou pas.

   On a déjà vu que f_4 n'est pas injective et donc pas bijective.
   On a également vu que Im $f_4 = \mathbb{R}^3$ ce qui signifie que f_4 est surjective.