Devoir Maison 18 - correction

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit f un endomorphisme de E.
Montrons que f commute avec tous les endomorphismes si, et seulement si, f est une homothétie.

$\Longleftarrow$: Si f est une homothétie alors $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ / $\forall \vec{x} \in E,\ f(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$.
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a :

$$\forall \vec{x} \in E, \quad u \circ f(\vec{x}) = u(f(\vec{x})) = u(\lambda \vec{x}) = \lambda u(\vec{x}) = f(u(\vec{x})) = f \circ u(\vec{x}).$$

Finalement, les homothéties commutent avec tous les endomorphisme

$\Longrightarrow$: Soit f un endomorphisme qui commute avec tous les endomorphismes. Soit $\vec{x} \in E$. Soit s une symétrie par rapport à $\mathrm{Vect}(\vec{x})$ parallèlement à un supplémentaire de $\mathrm{Vect}(\vec{x})$. f commute en particulier avec s :

$$f \circ s(\vec{x}) = s \circ f(\vec{x}) \Longleftrightarrow f(\vec{x}) = s(f(\vec{x}))$$

$f(\vec{x})$ est un vecteur invariant par s, c'est donc un élément de $\mathrm{Vect}(\vec{x})$. Il suit que la famille $(\vec{x}, f(\vec{x}))$ est liée. f est donc une homothétie.

Remarque : pourquoi a-t-on demandé que E soit de dimension finie ? Ca a bien dû servir quelque part...