(37)

PC	DM n°2	Correction

Exercice n°1 : Diffusion d'un parfum

(17)

1) On se place dans la zone $x < x_0$ où apparaissent K particules par unité de volume et par unité de temps. La variation dN du nombre de particules situées entre x et $x + dx$ entre t et $t + dt$ fait intervenir les nombres δN_e de particules qui entrent, δN_s de particules qui sortent et δN_a de particules qui apparaissent pendant dt :

$$dN = \delta N_e - \delta N_s + \delta N_a$$

bilan

c'est-à-dire :

$$\big(n(x,t+dt) - n(x,t)\big)Sdx = j_n(x,t)Sdt - j_n(x+dx,t)Sdt + KSdxdt$$

On effectue un développement limité à l'ordre 1 en dt et en dx :

$$\frac{\partial n}{\partial t}Sdxdt = -\frac{\partial j_n}{\partial x}Sdxdt + KSdxdt$$

d'où le bilan :

$$\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial j_n}{\partial x} = K}$$

K apparaît bien comme un terme source dans l'équation locale de conservation.
On applique alors la loi de Fick, projetée sur l'axe Ox :

$$j_n = -D\frac{\partial n}{\partial x}$$

pour finalement obtenir l'équation différentielle vérifiée par $n(x,t)$:

$$\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} - D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = K}$$

$0 < x < x_0$

On peut effectuer le même bilan dans la zone $x > x_0$ sans le terme source :

$$\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} - D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = 0}$$

$x > x_0$

2) En empêchant la diffusion en $x = x_0$, les particules qui apparaissent s'accumulent dans la zone $x < x_0$. La concentration reste alors uniforme dans cette zone, si bien que :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = K \quad \text{car} \quad \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = 0$$

On obtient alors simplement :

$$\boxed{n(x,t) = Kt}$$

La concentration dans la zone $x < x_0$ augmente linéairement dans le temps.

pas de R.S. possible

Pour obtenir un régime stationnaire et maintenir constant le nombre de particules dans cette zone, il faut que le nombre de particules qui apparaissent soit compensé par le flux de particules qui sortent en $x = x_0$.

3) Le régime stationnaire impose : $\frac{\partial n}{\partial t} = 0$, d'où l'équation vérifiée dans chaque zone :

Pour $x < x_0$: $\boxed{D\frac{d^2 n}{dx^2} + K = 0}$; pour $x > x_0$: $\boxed{\frac{d^2 n}{dx^2} = 0}$

On obtient alors $n(x)$ par intégration :

Pour $x < x_0$: $\boxed{n(x) = -\frac{K}{2D}x^2 + ax + b}$; pour $x > x_0$: $\boxed{n(x) = cx + d}$

où a, b, c et d sont des constantes d'intégration.

4) Le profil de concentration est symétrique de part et d'autre de $x = 0$, ce qui impose $n(-x) = n(x)$. Dans la zone $|x| < x_0$, cela se traduit directement par $\boxed{a = 0}$. On peut également écrire cette relation au voisinage de $x = 0$:

$$n(0^+) - n(0^-) = 0, \text{ c'est-à-dire : } j_n(x=0) = -D\left(\frac{\partial n}{\partial x}\right)_{x=0} = 0$$

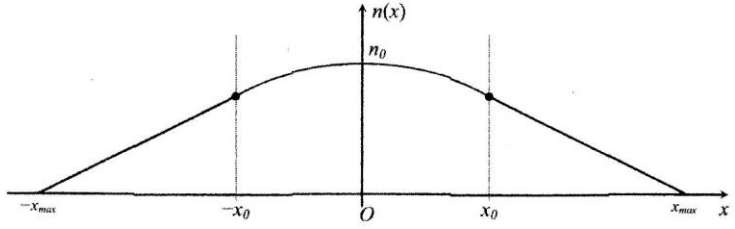
Aucune particule ne traverse la section $x = 0$, ce qui implique bien $a = 0$.
D'après l'énoncé, on pose : $n(0) = n_0$, soit : $\boxed{b = n_0}$.
En $x = x_0$, il y a continuité de la concentration : $\boxed{n(x_0^-) = n(x_0^+)}$ et continuité du flux de particules : $\boxed{j_n(x_0^-) = j_n(x_0^+)}$. D'où les deux relations supplémentaires :

$$n(x_0^-) = -\frac{K}{2D}x_0^2 + b = n(x_0^+) = cx_0 + d \text{ et } j_n(x_0^-) = -D\left(-\frac{K}{D}x_0\right) = j_n(x_0^+) = -Dc$$

c'est à dire :

$$\boxed{c = -\frac{Kx_0}{D}} \quad \text{et} \quad \boxed{d = n_0 + \frac{Kx_0^2}{2D}}$$

5) Le profil de concentration dans la zone $x < x_0$ est parabolique, tandis qu'il est linéaire pour $x > x_0$. Le profil est en outre symétrique de part et d'autre de $x = 0$.



toute interp. correcte

On retrouve graphiquement les conditions aux limites précédentes :
- Tangente horizontale en $x = 0$ indiquant un flux particulaire nul du fait de la symétrie du problème ;
- Raccordement des graphes en $x = x_0$ avec des pentes identiques par continuité du flux de particules.

Ce modèle unidimensionnel a l'avantage d'être simple. Cependant, on constate que la concentration en particules s'annule en $x = x_{max}$, alors que le flux particulaire est supposé non nul afin d'évacuer les particules apportées en régime stationnaire. Le passage à une étude tridimensionnelle permettrait de lever cette difficulté.

6) Entre t et $t + dt$, il apparaît globalement KSx_0dt particules dans la zone comprise entre $x = 0$ et $x = x_0$. En régime stationnaire, ces particules traversent la section d'abscisse $x = x_0$, si bien que l'on a l'égalité :

$$KSx_0dt = j_n(x_0)Sdt$$

qui impose :

$$\boxed{j_n(x_0) = Kx_0}$$

Cette relation est en fait identique à celle obtenue à la question 4) avec la continuité des flux particulaires en $x = x_0$: $j_n(x_0^-) = j_n(x_0^+)$ et aboutit à :

$$\boxed{c = -\frac{Kx_0}{D}}$$

7) Deux pulvérisations par jour pendant 6 mois équivalent en fait à $2\times6\times30 = 360$ pulvérisations. Le flacon contient 50 g de parfum, soit 0,5 mol, c'est-à-dire $3{,}0.10^{23}$ particules. Chaque pulvérisation dépose donc $\delta N = 8{,}3.10^{20}$ particules sur la peau. Ces particules sont ensuite libérées dans l'air pendant $\Delta t = 5$ heures selon la relation :

$$\delta N = KV\Delta t \quad \text{où } V = Lh(2x_0) \text{ est le volume concerné.}$$

Avec les valeurs numériques proposées et en remarquant que $2x_0 = L$, on obtient :

$$\boxed{K = \frac{\delta N}{L^2 h \Delta t} = 2{,}3.10^{22}\ \mathrm{m^{-3}s^{-1}}}$$

Exercice n°2 : Température du corps humain en plongée

(13)

1. Conformément à l'indication de l'énoncé, on pose $T_{\text{paroi}} = T_{\text{ext}} + \alpha$, donc

$$T_{\text{paroi}}^4 = (T_{\text{ext}} + \alpha)^4 = T_{\text{ext}}^4 \left(1 + \frac{\alpha}{T_{\text{ext}}}\right)^4 \simeq T_{\text{ext}}^4 \left(1 + 4\frac{\alpha}{T_{\text{ext}}}\right) \quad \text{car } \frac{\alpha}{T_{\text{ext}}} \ll 1.$$

Ainsi, $T_{\text{paroi}}^4 - T_{\text{ext}}^4 \simeq 4\alpha T_{\text{ext}}^3$ et la loi de Stefan s'écrit approximativement

$$\boxed{\Phi_{\text{rad}} \simeq 4\varepsilon\sigma T_{\text{ext}}^3 S\,(T_{\text{paroi}} - T_{\text{ext}})}\,. \qquad (4.3.1)$$

La proportionnalité à $(T_{\text{paroi}} - T_{\text{ext}})$ permet de définir la résistance thermique R_{rad} comme $\Phi_{\text{rad}} = \frac{T_{\text{paroi}} - T_{\text{ext}}}{R_{\text{rad}}}$. En identifiant cette définition avec la relation (4.3.1),

$$\boxed{R_{\text{rad}} = \frac{1}{4\varepsilon\sigma T_{\text{ext}}^3 S}}\,.$$

2. Le flux conducto-convectif à l'interface paroi-eau s'obtient en intégrant la loi de Newton sur toute l'interface.

$$\Phi_{\text{cc}} = \iint_S \vec{j}_{q_{\text{cc}}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}_{\text{sortant}} = h\,S\,(T_{\text{paroi}} - T_{\text{ext}})$$

⚠ rédact°

En identifiant avec la définition $\Phi_{\text{cc}} = \frac{T_{\text{paroi}} - T_{\text{ext}}}{R_{\text{cc}}}$ de la résistance thermique,

$$\boxed{R_{\text{cc}} = \frac{1}{hS}}\,.$$

3. Les résistances de conduction associées au corps humain et à la combinaison sont en série, car traversées par le même flux thermique. Les résistances de convection et de radiation sont en parallèle, car vues entre les mêmes différences de température (on rappelle que la température joue le rôle du potentiel en électrocinétique, voir figure 4.3.1).

schéma

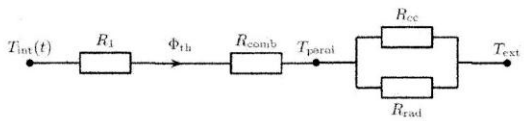


FIG. 4.3.1. Résistances thermiques.

La notion de résistance thermique a un sens uniquement en régime permanent (voir exercice 4.1 page 111). Dans ce cas, il n'y a nulle part accumulation d'énergie interne. C'est l'analogue de la non-accumulation de charge en électrocinétique dans l'ARQS, qui conduit à la loi des nœuds et permet d'établir les lois d'association des résistances électriques en série et en parallèle. Ainsi, ces lois sont transposables aux résistances thermiques et la résistance totale s'écrit

$$\boxed{R_{\text{tot}} = R_1 + R_{\text{comb}} + \frac{R_{\text{rad}} R_{\text{cc}}}{R_{\text{rad}} + R_{\text{cc}}}}\,.$$

4. On compare les résistances thermiques associées à la conducto-convection et au rayonnement. $\frac{R_{\text{cc}}}{R_{\text{rad}}} = \frac{4\varepsilon\sigma T_{\text{ext}}^3}{h} \simeq 0{,}03$ en prenant, par exemple, $T_{\text{ext}} \simeq 290\,\mathrm{K}$ et $\varepsilon = 1$ (cas où le rayonnement est le plus efficace possible). Ainsi, la résistance thermique de conducto-convection ne représente que 3 % de la résistance thermique de rayonnement. Le flux conducto-convectif est donc au moins trente fois plus important que le flux radiatif. Dans la suite, on néglige le transfert radiatif devant le transfert conducto-convectif ($R_{\text{rad}} \gg R_{\text{cv}}$), donc $R_{\text{tot}} \simeq R_1 + R_{\text{comb}} + R_{\text{cc}}$. En estimant l'aire du corps humain à $S \simeq 2\,\mathrm{m}^2$, la résistance thermique de la combinaison est $\boxed{R_{\text{comb}} = \frac{e}{KS} \simeq 4{,}6\cdot10^{-2}\,\mathrm{K\cdot W^{-1}}}$. On peut estimer le rapport

$$\boxed{\frac{R_{\text{comb}}}{R_{\text{cc}}} = \frac{eh}{K} \simeq 2\cdot10^1}\,,$$

Rcc négligeable

ce qui montre que $R_{\text{comb}} \gg R_{\text{cc}}$ et permet de simplifier la résistance thermique totale selon $\boxed{R_{\text{tot}} \simeq R_1 + R_{\text{comb}}}$.

5.a. On applique le premier principe de la thermodynamique, entre t et $t + \mathrm{d}t$, au corps humain qui constitue un système fermé, $\mathrm{d}U = -\Phi_s\,\mathrm{d}t + \mathcal{P}_{\text{ATP}}\,\mathrm{d}t$, où :

- $\Phi_s = \frac{T_{\text{int}} - T_{\text{ext}}}{R_{\text{tot}}}$ est le flux thermique sortant du corps ;
- $\mathcal{P}_{\text{ATP}}\,\mathrm{d}t$ est l'énergie apportée grâce aux molécules d'ATP dans le cadre d'un fonctionnement normal du métabolisme.

Méthode — **Premier principe et apport « interne » d'énergie**

L'écriture proposée du premier principe fait comme si l'énergie $\mathcal{P}_{\text{ATP}}\,\mathrm{d}t$ était apportée par l'extérieur. En réalité, il s'agit d'une conversion d'énergie potentielle interne (contenue dans les liaisons chimiques des molécules d'ATP) en énergie d'agitation thermique (forme « visible » d'énergie). Cette approche simplificatrice est systématiquement utilisée dans les exercices. En « externalisant » les phénomènes internes, elle évite d'avoir à considérer les modifications internes de composition du système dues à des réactions chimiques (ou nucléaires pour les exercices prenant en compte la radioactivité).

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = -\frac{T_{\mathrm{int}}(t) - T_{\mathrm{ext}}}{R_{\mathrm{tot}}} + \mathcal{P}_{\mathrm{ATP}}$$

La première loi de Joule appliquée au corps humain s'écrit

$$\mathrm{d}U = MC\,[T_{\mathrm{int}}(t+\mathrm{d}t) - T_{\mathrm{int}}(t)] \;\Rightarrow\; M\,C\,\frac{\mathrm{d}T_{\mathrm{int}}}{\mathrm{d}t} + \frac{T_{\mathrm{int}}(t)}{R_{\mathrm{tot}}} = \mathcal{P}_{\mathrm{ATP}} + \frac{T_{\mathrm{ext}}}{R_{\mathrm{tot}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}T_{\mathrm{int}}}{\mathrm{d}t} + \frac{T_{\mathrm{int}}}{\tau} = \frac{1}{\tau}(T_{\mathrm{ext}} + R_{\mathrm{tot}}\mathcal{P}_{\mathrm{ATP}}) \;\text{ où }\; \tau = MC\,R_{\mathrm{tot}}}\,.$$

5.b. La solution de l'équation différentielle est $T_{\mathrm{int}}(t) = T_{\mathrm{lim}} + A\exp(-t/\tau)$, où A est une constante à déterminer avec la condition initiale $T_{\mathrm{int}}(0) = 37\,°\mathrm{C}$. Ainsi, $A = T_{\mathrm{int}}(0) - T_{\mathrm{lim}}$ et

$T_{lim} = T_{ext} + R_{tot} \cdot P_{ATP}$

$$\boxed{T_{\mathrm{int}}(t) = T_{\mathrm{lim}} + (T_{\mathrm{int}}(0) - T_{\mathrm{lim}})\exp(-t/\tau)}\,.$$

A priori, la température interne du corps décroît en fonction du temps, donc le préfacteur $T_{\mathrm{int}}(0) - T_{\mathrm{lim}}$ de l'exponentielle est positif.

5.c. L'instant t_{h} pour lequel l'hypothermie est atteinte vérifie $T(t_{\mathrm{h}}) = T_{\mathrm{h}} = 35\,°\mathrm{C}$, donc $T_{\mathrm{h}} = T_{\mathrm{lim}} + (T_{\mathrm{int}}(0) - T_{\mathrm{lim}})\exp(-t_{\mathrm{h}}/\tau)$, soit

UDG

$$\boxed{t_{\mathrm{h}} = \tau\ln\frac{T_{\mathrm{int}}(0) - T_{\mathrm{lim}}}{T_h - T_{\mathrm{lim}}} \simeq 1\cdot 10^4\,\mathrm{s} \simeq 3\,\mathrm{h}}\,.$$

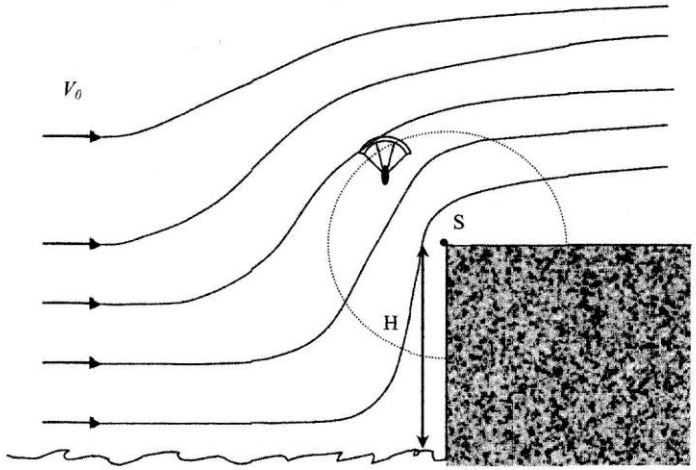
L'ordre de grandeur de cette valeur paraît en accord avec l'expérience. L'application numérique pour un plongeur sans combinaison ($R_{\mathrm{comb}} = 0$) donnerait $T_{\mathrm{h}} \simeq 50\,\mathrm{min}$, ce qui est un bon ordre de grandeur également. Il est difficile d'obtenir des résultats précis, car les valeurs de R_1 et $\mathcal{P}_{\mathrm{ATP}}$ proposées par l'énoncé sont variables d'une personne à l'autre (frilosité, métabolisme).

Com

Exercice n°3 : Parapente en bord de mer

(7)

1) Loin de la falaise, l'écoulement est peu perturbé : les lignes de courant sont approximativement horizontales. La présence de la falaises impose à l'air incident d'avoir un mouvement ascendant, d'où l'allure des lignes de courant :



allure des lignes de courant

2) $V_r = |\vec{V}|\cos(\theta - \omega)$, d'où $\boxed{V_r = \left(\frac{4H}{3\pi r}\right)^{1/3} V_0\cos\left(\frac{2\theta}{3}\right)}$.

De même, $V_\theta = -|\vec{V}|\sin(\theta - \omega)$, d'où $\boxed{V_\theta = -\left(\frac{4H}{3\pi r}\right)^{1/3} V_0\sin\left(\frac{2\theta}{3}\right)}$.

3) Ici, le champ de vitesses n'a pas de composante selon Oz (perpendiculaire au plan de la feuille) ni de dépendance par rapport à z, donc :

$$\mathrm{div}(\vec{V}) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta} = \frac{1}{r}\left(\frac{4H}{3\pi}\right)^{1/3} V_0\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{2/3}\right)\cos\left(\frac{2\theta}{3}\right) - r^{-1/3}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\left(\frac{2\theta}{3}\right)\right)\right) \text{ d'où}$$

$$\mathrm{div}(\vec{V}) = \frac{1}{r}\left(\frac{4H}{3\pi}\right)^{1/3} V_0\left(\frac{2}{3}r^{-1/3}\cos\left(\frac{2\theta}{3}\right) - \frac{2}{3}r^{-1/3}\left(\cos\left(\frac{2\theta}{3}\right)\right)\right) = 0\,.$$

L'écoulement est bien incompressible.

$$\vec{\mathrm{rot}}(\vec{V}) = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rV_\theta) - \frac{\partial V_r}{\partial\theta}\right)\vec{e}_z = \frac{1}{r}\left(\frac{4H}{3\pi}\right)^{1/3} V_0\left(-\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{2/3}\right)\sin\left(\frac{2\theta}{3}\right) - r^{-1/3}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cos\left(\frac{2\theta}{3}\right)\right)\right)\vec{e}_z$$

$$\text{d'où } rot(\vec{V}) = \frac{1}{r}\left(\frac{4H}{3\pi}\right)^{1/3} V_0\left(-\frac{2}{3}r^{-1/3}\sin\left(\frac{2\theta}{3}\right) + \frac{2}{3}r^{-1/3}\left(\sin\left(\frac{2\theta}{3}\right)\right)\right)\vec{e}_z = \vec{0}\,.$$

L'écoulement est bien irrotationnel.