Corrigé du DM3

Exercice 1 : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\text{Arctan}(2x) + \text{Arctan}(3x) = \dfrac{\pi}{4}$.

Supposons qu'il existe des solutions à (E).
En appliquant tan à (E) et en utilisant la formule $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$, il vient :

$$(E) \Longrightarrow \frac{2x+3x}{1-6x^2} = 1 \Longleftrightarrow 6x^2+5x-1=0 \Longleftrightarrow (x+1)(6x-1)=0 \Longleftrightarrow x \in \{-1; \frac{1}{6}\}$$

Il est important de comprendre qu'on n'a qu'une implication au début car tan n'est pas bijective. Cela signifie que, si x est solution de (E) alors $x \in \{-1; \frac{1}{6}\}$; cela ne signifie pas que -1 et $\frac{1}{6}$ sont solutions de (E) ! Ces nombres peuvent être solution de (E) : l'un, l'autre, les deux, ou aucun.

Nous allons nous servir du TVI pour trancher. La fonction $f : x \longmapsto \text{Arctan}(2x) + \text{Arctan}(3x)$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]\lim\limits_{-\infty} f; \lim\limits_{+\infty} f[=]-\pi;\pi[$.
$0 \in]-\pi;\pi[$, il existe donc un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(\alpha) = 0$. D'après le travail qui a été fait : $\alpha \in \{-1; \frac{1}{6}\}$.
On a $f(0) = 0$, la fonction f étant croissante, on a $0 < \alpha$ ce qui nous permet de conclure que $\alpha = \frac{1}{6}$.

Finalement, $\boxed{(E) \text{ a une unique solution : } \frac{1}{6}}$.

Exercice 2 : trouver toutes les fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ qui vérifient la relation

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y) \ : (\star).$$

Procédons par analyse-synthèse.

Analyse : supposons que f soit une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et qui vérifie $(\star)$.
Fixons $y \in \mathbb{R}$, on a : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + f(y)$. Chaque membre de l'équation précédente est une fonction dérivable de x et, en dérivant, on a : $f'(x+y) = f'(x)$. Ceci étant vrai pour tout y, on en déduit que f' est une fonction constante, mettons $a \in \mathbb{R}$. Puisqu'on travaille sur un intervalle, il existe une constante $b \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax + b$. Finalement, f est une fonction affine.

Synthèse : soit f une fonction affine, mettons $f(x) = ax + b$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. f est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, regardons si elle vérifie $(\star)$. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = a(x+y) + b = ax + ay + b$ et $f(x) + f(y) = ax + ay + 2b$. f vérifie donc $(\star)$ si, et seulement si, $b = 2b$, c'est-à-dire $b = 0$.

Conclusion : l'ensemble des fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ qui vérifient $(\star)$ est l'ensemble des fonctions linéaires, c'est-à-dire de la forme $x \mapsto ax$ (avec $a \in \mathbb{R}$ fixé).