Corrigé du DM 6

Exercice n° 1

1. On calcule : $P(M) = M^2 + 2M - 3I_3 = 0$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. La division euclidienne de X^n par $P = (X+1)(X-3)$ s'écrit $X^n = Q_n P + a_n X + b_n \ : (\star)$ avec $Q_n \in \mathbb{K}[X]$, $(a_n; b_n) \in \mathbb{K}^2$.
   En évaluant $(\star)$ en -1 on trouve $(-1)^n = -a_n + b_n$ et en évaluant en 3 on trouve $3^n = 3a_n + b_n$.
   Il suit que $a_n = \dfrac{3^n - (-1)^n}{4}$ et $b_n = \dfrac{3^n + 3(-1)^n}{4}$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$ on a avec $(\star)$: $M^n = Q_n(M)P(M) + a_n M + B_n I_3$.
   Comme $P(M) = 0$ il suit que $M^n = a_n M + b_n I_3$ soit :
$$M^n = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -7(3^n - (-1)^n) + 3^n + 3(-1)^n & 0 & -8(3^n - (-1)^n) \\ 4(3^n - (-1)^n) & (3^n - (-1)^n) + 3^n + 3(-1)^n & 4(3^n - (-1)^n) \\ 4(3^n - (-1)^n) & 0 & 5(3^n - (-1)^n) + 3^n + 3(-1)^n \end{pmatrix}$$

Exercice n° 2

1. L'ensemble des fonctions réelles sur $[0,1]$, continues, positives ou nulles est un sous-ensemble de l'espace de référence $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Ce sous-ensemble n'est pas stable par combinaisons linéaires donc n'est pas un sous-espaces de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ donc ce n'est pas un espace vectoriel. Par exemple, exp est dans ce sous-ensemble mais $-\exp$ n'y est pas.
2. L'ensemble des fonctions réelles sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ contient la fonction nulle et est stable par combinaisons linéeaires (opérations sur les limites), c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et c'est donc un espace vectoriel.
3. On a :
$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x_1 - x_2 + x_3 &=& 0 \\ x_1 - 4x_2 + 7x_3 &=& 0 \\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 &=& 0. \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x_1 &=& \frac{3}{7}x_3 \\ \\ x_2 &=& \frac{13}{7}x_3. \end{array}\right.$$
   L'ensemble des solutions du système est donc $\mathrm{Vect}(\ (\frac{3}{7}; \frac{13}{7}; 1)\ )$, c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, c'est donc un espace-vectoriel.
4. Soit A l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ vérifiant $f(1/2) = 0$. A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0([0;1])$. En effet :
   — la fonction nulle vérifie bien $f(\frac{1}{2}) = 0$, elle est dans A ;
   — soit f et g des fonctions de A soit λ et μ deux réels, posons $h = \lambda f + \mu g$.
   h est continue et on a :
$$h(\frac{1}{2}) = (\lambda f + \mu g)(\frac{1}{2}) = \lambda f(\frac{1}{2}) + \mu g(\frac{1}{2}) = 0$$
   donc A est stable par combinaisons linéaires.
5. Soit I l'ensemble des fonctions impaires sur $\mathbb{R}$. I est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ car :
   — la fonction nulle est impaire, elle est dans I ;
   — soit f et g des fonctions de I soit λ et μ deux réels, posons $h = \lambda f + \mu g$.
$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(-x) = (\lambda f + \mu g)(-x) = \lambda f(-x) + \mu g(-x) = -\lambda f(x) - \mu g(x) = -(\lambda f + \mu g)(x) = -h(x)$$
   donc $h \in I$ et I est stable par combinaisons linéaires.
6. Soit $a < b$ deux réels.
   Soit B l'ensemble des fonctions sur $[a,b]$ continues, vérifiant $f(a) = 7f(b) + \int_a^b t^3 f(t)\ \mathrm{d}t$.
   Montrons que B est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0([a;b])$.
   — notons n la fonction nulle. On a : $n(a) = 0$ et $n(b) = 0$ donc $n(a) = 7n(b) + \int_a^b t^3 n(t)\mathrm{d}t$. n est donc dans B ;
   — soit f et g des fonctions de B soit λ et μ deux réels, posons $h = \lambda f + \mu g$.
   h est continue et on a :
$$\begin{aligned} h(b) = (\lambda f + \mu g)(b) = \lambda f(b) + \mu g(b) &= \lambda\left(7f(b) + \int_a^b t^3 f(t)\ \mathrm{d}t\right) + \mu\left(7g(b) + \int_a^b t^3 g(t)\ \mathrm{d}t\right) \\ &= 7(\lambda f(7) + \mu g(7)) + \int_a^b t^3(\lambda f(t) + \mu g(t))\mathrm{d}t = 7h(b) + \int_a^b t^3 h(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$
   donc $h \in B$ et B est stable par combinaisons linéaires.

7. L'ensemble des fonctions sur $\mathbb{R}$ qui sont nulle en 1 ou nulle en 4 n'est pas stable par combinaisons linéaires et n'est donc pas un espace vectoriel.
   Comme contre-exemple, on peut prendre $f(x) = x - 1$ et $g(x) = x - 4$. Soit $h = f + g$, on a $h(x) = 2x - 5$ qui ne s'annule ni en 1 ni en 4.
8. L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant $f'' + 2f = 0$ est l'ensemble des fonctions de la forme $t \mapsto \lambda\cos(t\sqrt{2}) + \mu\sin(t\sqrt{2})$ avec λ et μ des réels. Autrement dit, c'est $\text{Vect}(t \mapsto \cos(t\sqrt{2})\ ;\ t \mapsto \sin(t\sqrt{2}))$ et donc c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et donc un espace vectoriel lui-même.
9. L'ensemble des fonctions sur $\mathbb{R}$ telles que $f(3) = 7$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ car il ne contient pas la fonction nulle. En conséquence, ce n'est pas un espace vectoriel.
10. L'ensemble des primitives de la fonction xe^x sur $\mathbb{R}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ car il ne contient pas la fonction nulle. En conséquence, ce n'est pas un espace vectoriel.
11. L'ensemble des nombres complexes d'argument $\pi/4 + k\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$) n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ car il ne contient pas 0 qui est un complexe sans argument. En conséquence, ce n'est pas un espace vectoriel.

    Remarque : si on rajoute 0 à cet ensemble, on obtient un sous-espace vectoriel réel de $\mathbb{C}$ mais pas un sous-espace vectoriel complexe de $\mathbb{C}$.
12. L'ensemble C des points (x, y) de $\mathbb{R}^2$, vérifiant $\sin(x + y) = 0$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ car cet ensemble n'est pas stable par combinaisons linéaires. Comme contre-exemple, on a $(\pi; 0) \in C$ car $\sin(\pi + 0) = 0$ mais $\frac{1}{2}(\pi; 0) = (\frac{\pi}{2}; 0) \notin C$ car $\sin(\frac{\pi}{2} + 0) = 1$.
    En conséquence, C n'est pas un espace vectoriel.
13. L'ensemble D des vecteurs (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ orthogonaux au vecteur $(-1, 3, -2)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. En effet :
    — $(0, 0, 0)$ est orthogonal à $(-1, 3, -2)$.
    — Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de D et soit λ et μ deux réels. Notons $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$. On a :
    $$\vec{w} \cdot (-1, 3, -2) = (\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) \cdot (-1, 3, -2) = \lambda\vec{u} \cdot (-1, 3, -2) + \mu\vec{v} \cdot (-1, 3, -2) = 0$$
    $\vec{w}$ est donc orthogonal à $(-1, 3, -2)$ et donc $\vec{w} \in D$ et D est stable par combinaisons linéaires.
    Finalement, D est donc un espace vectoriel en tant que sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
14. L'ensemble E des polynômes ne comportant pas de terme de degré 7 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$. En effet,
    — 0 ne comporte pas de monôme de degré 7, donc $0 \in E$.
    — Soit P et Q deux polynômes de D et soit λ et μ deux scalaires. Notons $R = \lambda P + \mu Q$.
    Comme P et Q sont dans E, ils n'ont pas de monômes de degré 7 et donc R non plus. Il suit que $R \in E$ et E est stable par combinaisons linéaires.

Exercice n° 3

On remarque que $v_1 = 2u_1 - u_2$ et $v_2 = u_1 + 3u_2$. On a donc v_1 et v_2 qui sont dans $\text{Vect}(u_1, u_2)$ et $\text{Vect}(v_1, v_2) \subset \text{Vect}(u_1, u_2)$.

Par ailleurs, $3v_1 + v_2 = 7u_1$ soit $u_1 = \frac{3}{7}v_1 + \frac{1}{7}v_2$. De façon analogue, $v_1 - 2v_2 = -7u_2 \iff -\frac{1}{7}v_1 + \frac{2}{7}v_2 = u_2$. On a donc $\text{Vect}(u_1, u_2) \subset \text{Vect}(v_1, v_2)$.

Par inclusion réciproque, on en déduit que $\text{Vect}(v_1, v_2) = \text{Vect}(u_1, u_2)$.

Exercice n° 4

1. $\text{Vect}\{v_1, v_2\}$ et $\text{Vect}\{v_3\}$ ne sont pas supplementaires dans $\mathbb{R}^4$ car $(1, 0, 0, 0) \notin \text{Vect}\{v_1, v_2\} + \text{Vect}\{v_3\}$.
   En effet, $\text{Vect}\{v_1, v_2\} + \text{Vect}\{v_3\} = \text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}$ et les vecteurs de $\text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}$ sont de la forme $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = (\alpha, \gamma, \beta, \alpha)$ avec α, β et γ des réels. Il est clair que $(1, 0, 0, 0)$ n'est pas de cette forme.
2. On a : $\text{Vect}\{v_1, v_2\} = \{(\alpha, 0, \beta, \alpha)\ /\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2)$ et $\text{Vect}\{v_4, v_5\} = \{(0, \mu, 0, \mu + \lambda)\ /\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2)$.
   On a : $(\alpha, 0, \beta, \alpha) = (0, \mu, 0, \mu + \lambda) \iff \alpha = \beta = \lambda = \mu = 0$ donc $\text{Vect}\{v_1, v_2\} \cap \text{Vect}\{v_4, v_5\} = (0, 0, 0, 0)$.

   Par ailleurs, la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est dans $\text{Vect}\{v_1, v_2\} + \text{Vect}\{v_4, v_5\} = \text{Vect}\{v_1, v_2 v_4, v_5\}$. En effet :
   $$(1, 0, 0, 0) = v_1 - v_4\ ;\ (0, 1, 0, 0) = v_5 - v_4\ ;\ (0, 0, 1, 0) = v_2\ ;\ (0, 0, 0, 1) = v_4$$
   Il suit que $\text{Vect}\{v_1, v_2\} + \text{Vect}\{v_4, v_5\} = \mathbb{R}^4$.

   Finalement, $\text{Vect}\{v_1, v_2\}$ et $\text{Vect}\{v_4, v_5\}$ sont bien supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

3. On a $v_5 = v_3 + v_4$ donc $v_5 \in \mathrm{Vect}\{v_1, v_3, v_4\} \cap \mathrm{Vect}\{v_2, v_5\}$. Il suit que $\mathrm{Vect}\{v_1, v_3, v_4\} \cap \mathrm{Vect}\{v_2, v_5\} \neq \{(0,0,0,0)\}$ et ces deux sous-espaces ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.
4. On a $v_4 = v_5 - v_3$ donc $v_4 \in \mathrm{Vect}\{v_1, v_4\} \cap \mathrm{Vect}\{v_3, v_5\}$ et ces deux sous-espaces ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.