Correction du DM6

Question 1 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\mathrm{i}z^2 + 2\mathrm{i}z - 1 = 0$.

Cette équation du second degré n'a pas de racine évidente, on calcule son discriminant : $\Delta = -4 + 4\mathrm{i}$. L'équation a donc deux solutions distinctes et on a besoin d'une racine carrée de Δ pour les donner. Plutôt que de procéder avec la forme algébrique, on observe que l'argument de Δ est évident : c'est $\frac{3\pi}{4}$. Il suit que $\Delta = 4\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$ et que $\delta = 2\sqrt{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{8}}$ est une racine carrée de Δ.

Finalement, $\boxed{\text{l'équation a deux solutions : } \dfrac{-2\mathrm{i}+\delta}{2\mathrm{i}} \text{ et } \dfrac{-2\mathrm{i}-\delta}{2\mathrm{i}}}$.

Question 2 : Résoudre l'équation différentielle $xy' - 2y = -x^2\ln(x)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Il s'agit de résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre. On applique la méthode du cours, en commençant par écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, xy' - 2y = -x^2 \ln x \iff y' - \frac{2}{x}y = -x\ln x \ : (E).$$

— **Résolution de l'équation homogène** (E_h) : $y' - \frac{2}{x}y = 0$ **:** on pose, pour $x > 0$, $a(x) = -\frac{2}{x}$ et alors $A(x) = -2\ln(x) = -\ln(x^2)$ est une primitive de $a(x)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Il suit que $\underline{\text{la solution de } (E_h) \text{ est } \{x \longmapsto \lambda x^2 / \lambda \in \mathbb{R}\}}$.

— **Recherche de solution particulière avec variation de la constante :**
soit, pour $x > 0$, $f(x) = \lambda(x)x^2$ avec $\lambda(x)$ une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.
f est solution de (E) si, et seulement si :

$$xf'(x) - 2f(x) = -x^2\ln x \iff x(\lambda'(x)x^2 + 2x\lambda(x)) - 2x^2\lambda(x) = -x^2\ln x \iff \lambda'(x) = -\frac{\ln x}{x}.$$

On reconnait une forme « $u'u$ » et il suit que $\lambda(x) = -\frac{1}{2}(\ln x)^2$ convient.
Finalement, $\underline{f(x) = -\frac{x^2(\ln x)^2}{2} \text{ est solution particulière de } (E)}$.

— **Solution générale de** (E) **:** $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E) \text{ est } \left\{x \longmapsto x^2\left(\lambda - \dfrac{(\ln x)^2}{2}\right) / \lambda \in \mathbb{R}\right\}}$.

Question 3 : Résoudre l'équation différentielle $y'' + y' - 2y = 3t + 1$ avec les conditions $\left\{\begin{array}{l} y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{array}\right.$.

Il s'agit de résoudre une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants (on la note (E)), avec des conditions initiales. On applique la méthode du cours :

— **Résolution de l'équation homogène** (E_h) : $y'' + y' - 2y = 0$ **:** l'équation caractéristique est $r^2 + r - 2 = 0 \iff (r-1)(r+2) = 0$. Elle admet deux solutions réelles : 1 et -2, on en déduit que $\underline{\text{les solutions de } (E_h) \text{ sont les fonctions de la forme } t \mapsto \lambda\mathrm{e}^t + \mu\mathrm{e}^{-2t} \text{ avec } (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2}$.

— **Recherche de solution particulière :** on cherche une solution particulière affine, de la forme $f(t) = at + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ à déterminer. f est solution de (E) si, et seulement si :

$$f''+f'-2f = 3t+1 \iff a-2(at+b) = 3t+1 \iff -2at+a-2b = 3t+1 \iff \left\{\begin{array}{l} -2a = 3 \\ a - 2b = 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} a = -\frac{3}{2} \\ b = -\frac{5}{4} \end{array}\right.$$

Finalement, $\underline{f(t) = -\frac{3}{2}t - \frac{5}{4} \text{ est solution particulière de } (E)}$.

— **Solution générale de** (E) **:** $\underline{\text{les solutions de } (E) \text{ sont les fonctions de la forme } t \mapsto \lambda\mathrm{e}^t + \mu\mathrm{e}^{-2t} - \frac{3}{2}t - \frac{5}{4}}$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

— **Trouver la solution qui vérifie les conditions initiales :** soit $f(t) = \lambda\mathrm{e}^t + \mu\mathrm{e}^{-2t} - \frac{3}{2}t - \frac{5}{4}$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ à déterminer. f vérifie $\left\{\begin{array}{l} y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{array}\right.$ si, et seulement si, $\left\{\begin{array}{l} f(0) = 1 \\ f'(0) = 2 \end{array}\right.$: $(\star)$.

Or, $f(0)=\lambda+\mu-\frac{5}{4}$ et $f'(0)=\lambda-2\mu-\frac{3}{2}$ on a donc : $(\star) \iff \left\{\begin{array}{l}\lambda+\mu-\frac{5}{4}=1\\ \lambda-2\mu-\frac{3}{2}=2\end{array}\right.$.

En soustrayant la 2è équation dans la première, on a :

$$(\star) \iff \left\{\begin{array}{l}3\mu+\frac{1}{4}=-1\\ \lambda-2\mu-\frac{3}{2}=2\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}\mu=-\frac{5}{12}\\ \lambda=2\mu+\frac{3}{2}+2\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}\mu=-\frac{5}{12}\\ \lambda=\frac{8}{3}\end{array}\right.$$

Finalement, $\boxed{\text{l'unique solution de } (E) \text{ qui vérifie les conditions est } f(t)=\frac{8}{3}\mathrm{e}^t-\frac{5}{12}\mathrm{e}^{-2t}-\frac{3}{2}t-\frac{5}{4}}$.

Question 4 : Calculer les trois intégrales suivantes :

$$I_1=\int_0^1 \frac{x^2-1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \quad ; \quad I_2=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(x)\,\mathrm{d}x \quad ; \quad I_3=\int_0^1 (t+3)\mathrm{e}^{1-2t}\,\mathrm{d}t$$

$$I_1=\int_0^1 \frac{x^2-1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 \frac{x^2+1-2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 1-2\frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=[x-2\mathrm{Arctan}\,x]_0^1\boxed{=\ 1-\frac{\pi}{2}}$$

$\boxed{I_2 \text{ est l'intégrale d'une fonction impaire sur un segment symétrique par rapport à 0, } I_2 \text{ est donc nulle.}}$

Si on ne l'a pas vu, pour calculer I_2, on commence par linéariser $\sin^3$. On a, pour tout réel x :

$$\sin^3 x=\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\right)^3=-\frac{1}{8\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}3x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}3x}-3\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)=-\frac{1}{8\mathrm{i}}\left(2\mathrm{i}\sin 3x-6\mathrm{i}\sin x\right)=-\frac{1}{4}\sin 3x+\frac{3}{4}\sin x$$

Il suit que $I_2=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{4}\sin 3x+\frac{3}{4}\sin x\,\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{12}\cos 3x-\frac{3}{4}\cos x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\boxed{=\ 0}$

On calcule I_3 par parties en posant $\left\{\begin{array}{l}u'(t)=\mathrm{e}^{1-2t}\\ v(t)=t+3\end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{l}u(t)=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{1-2t}\\ v'(t)=1\end{array}\right.$. Il vient :

$$I_3=\int_0^1 (t+3)\mathrm{e}^{1-2t}\,\mathrm{d}t=\left[-\frac{1}{2}(t+3)\mathrm{e}^{1-2t}\right]_0^1-\int_0^1 -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{1-2t}\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\left[(t+3+\frac{1}{2})\mathrm{e}^{1-2t}\right]_0^1\boxed{=\ -\frac{9}{4}\mathrm{e}^{-1}+\frac{7}{4}\mathrm{e}}$$

Question 5 : A l'aide d'un changement de variable, calculer $I_4=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{\mathrm{Arcsin}(x)}{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

Faisons le changement de variable $\varphi(t)=\sin t$. Il vient :

$$I_4=\int_{\mathrm{Arcsin}\ 0}^{\mathrm{Arcsin}\ \frac{1}{2}}\sqrt{\frac{\mathrm{Arcsin}\ (\sin t)}{1-\sin^2 t}}\cos t\ \mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sqrt{t}}{|\cos t|}\cos t\ \mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{t}\ \mathrm{d}t=\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{\pi}{6}}\boxed{=\ \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Question 5 : Soit $x\in\mathbb{R}$. Factoriser $\sin(3x)-\sin(5x)$.

$$\sin(3x)-\sin(5x)=\mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}3x}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}5x})=\mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}4x}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})=\mathrm{Im}(-2\mathrm{i}\sin(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}4x})\boxed{=-2\sin(x)\cos(4x)}.$$

Question 6 : Factoriser au maximum $X^4+3X^3+3X^2+3X+2$.

On observe que -1 et -2 sont racines du polynôme, on peut donc le factoriser par $(X+1)(X+2)$.
Après calculs, on a $\boxed{X^4+3X^3+3X^2+3X+2=(X+2)(X+1)(X^2+1)}$ qui est un produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$.
Si on travaille dans $\mathbb{C}$ on peut aller plus loin : $\boxed{X^4+3X^3+3X^2+3X+2=(X+2)(X+1)(X+\mathrm{i})(X-\mathrm{i})}$.

Question 7 : Inverser la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

On met en œuvre l'algorithme du pivot de Gauss et on obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1 & 9/4 & -7/8 & 17/8 \end{array}\right)$$

Finalement, $\boxed{\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1/2 & -1/4 & 3/4 \\ 9/4 & -7/8 & 17/8 \end{pmatrix}}$.

Question 8 : $\begin{cases} 2x+4y+z=5 \\ x-y+2z=1 \\ 3x-z=2 \end{cases} \iff \begin{cases} x-y+2z=1 \\ 2x+4y+z=5 \\ 3x-z=2 \end{cases} \quad (L_1 \leftrightarrow L_2)$

$$\iff \begin{cases} x-y+2z=1 \\ 6y-3z=3 \\ 3y-7z=-1 \end{cases} \quad (L_2 \leftarrow L_2-2L_1 \text{ et } L_3 \leftarrow L_3-3L_1)$$

$$\iff \begin{cases} x-y+2z=1 \\ 3y-7z=-1 \\ 6y-3z=3 \end{cases} \quad (L_2 \leftrightarrow L_3)$$

$$\iff \begin{cases} x-y+2z=1 \\ 3y-7z=-1 \\ 11z=5 \end{cases} \quad (L_3 \leftarrow L_3-2L_2)$$

$$\iff \begin{cases} x-y+2z=1 \\ 3y-7z=-1 \\ z=\frac{5}{11} \end{cases} \quad (L_3 \leftarrow \tfrac{1}{11}L_3)$$

$$\iff \begin{cases} x-y=\frac{1}{11} \\ 3y=\frac{24}{11} \\ z=\frac{5}{11} \end{cases} \quad (\text{On remplace } z \text{ par sa valeur dans } L_1 \text{ et } L_2)$$

$$\iff \begin{cases} x-y=\frac{1}{11} \\ y=\frac{8}{11} \\ z=\frac{5}{11} \end{cases} \quad (L_2 \leftarrow \tfrac{1}{3}L_2)$$

$$\iff \begin{cases} x=\frac{9}{11} \\ y=\frac{8}{11} \\ z=\frac{5}{11} \end{cases} \quad (\text{On remplace } y \text{ par sa valeur dans } L_1)$$

Finalement, $\boxed{\text{le système admet pour unique solution le triplet } \left(\frac{9}{11};\frac{8}{11};\frac{5}{11}\right)}$.

Question 9 : Discuter, en fonction du réel α, le nombre de solutions de l'équation $\dfrac{x^2}{x-2}=\alpha$.

Soit, pour $x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$ la fonction $f(x)=\frac{x^2}{x-2}$. On va dresser le tableau de variations complet de f.

Etude des limites de f aux bornes de $\mathbb{R}\backslash\{2\}$:
$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{2,0\}, f(x)=\frac{x}{1-\frac{2}{x}}$, on en déduit que $\underline{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty}$ et $\underline{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$.

On a $\lim\limits_{x\to2} x^2=4$ et $\lim\limits_{x\to2^-} x-2=0^-$ donc $\underline{\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=-\infty}$. De façon analogue, $\underline{\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=+\infty}$.

Etude des variations de f et construction du tableau de variations :
f est clairement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{2\},\ f'(x)=\frac{2x(x-2)-x^2}{(x-2)^2}=\frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$.
On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$f(0)=0$	$\searrow$	$-\infty \;\|\|\; +\infty$	$\searrow$	$f(4)=8$	$\nearrow$	$+\infty$

Utilisation du Théorème des Valeurs Intermédiaires et conclusion :
f est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ et donc le TVI s'applique. D'après le tableau de variations construit,

l'équation $f(x)=\alpha$ admet :
- aucune solution si $\alpha \in]0;8[$;
- une unique solution si $\alpha \in \{0;8\}$;
- exactement deux solutions si $\alpha \in]-\infty;0[\cup]8;+\infty[$.

Question 10 : Poser la division euclidienne de X^4+X par $2X^3+5X^2+3X+2$.

$$
\begin{array}{cccccc|l}
 & X^4 & & & +X & & 2X^3+5X^2+3X+2 \\ \cline{7-7}
-(& X^4 & +\frac{5}{2}X^3 & +\frac{3}{2}X^2 & +X) & & \frac{1}{2}X-\frac{5}{4} \\ \cline{1-5}
 & & -\frac{5}{2}X^3 & -\frac{3}{2}X^2 & & & \\
-(& & -\frac{5}{2}X^3 & -\frac{25}{4}X^2 & -\frac{15}{4}X & -\frac{5}{2}) & \\ \cline{1-6}
 & & & \frac{19}{4}X^2 & +\frac{15}{4}X & +\frac{5}{2} &
\end{array}
$$

Finalement, $\boxed{X^4+X=(2X^3+5X^2+3X+2)(\frac{1}{2}X-\frac{5}{4})+\frac{19}{4}X^2+\frac{15}{4}X+\frac{5}{2}}$.