Devoir Maison 7 - Correction

On cherche à résoudre $(E)\ :\ xy'' - (1+x)y' + y = 1$ qui est une équation différentielle linéaire du second ordre, mais dont les coefficients ne sont pas constants.
On pose $z = y' - y$, on alors $xy'' - (1+x)y' + y = 1 \Longleftrightarrow xz' - z = 1\ :\ (\widehat{E})$.

$(\widehat{E})$ est linéaire du premier ordre, on sait la résoudre :

Résolution de l'équation homogène :

- Si $x \neq 0$, $(\widehat{E}_h) \Longleftrightarrow z' - \frac{1}{x}z = 0$. On a $a(x) = -\frac{1}{x}$ et donc $A(x) = \ln|x|$ et les solutions sont de deux formes : sur $\mathbb{R}^{+*}$, $x \mapsto \lambda x$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$, $x \mapsto -\mu x$ avec λ et μ des réels.
- Puisque λ et μ sont quelconques, on peut poser dans le second cas $\lambda = -\mu$ et on a la même forme. Si on vérifie, $x \mapsto \lambda x$ est également solution pour $x = 0$, la solution est donc finalement définie sur $\mathbb{R}$.

Solution particulière : $x \mapsto -1$ est solution de $(\widehat{E})$.

Solution Générale : $\mathcal{S}_{\widehat{E}} = \left\{ \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda x - 1 \end{array} \right. \ /\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

Retour à (E) :

y est solution de (E) si, et seulement si, $y' - y$ est solution de $(\widehat{E})$. On a :

$$y' - y \in \mathcal{S}_{\widehat{E}} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}\ ,\ y' - y = \lambda x - 1.$$

On obtient une nouvelle équation différentielle linéaire du premier ordre dont la résolution donne :

$$y' - y = \lambda x - 1 \Longleftrightarrow y \in \left\{ x \mapsto \mu \mathrm{e}^x - \lambda x - \lambda + 1\ /\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Finalement, les solutions de (E) sont les fonctionsde la forme $\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \mu \mathrm{e}^x + \lambda x + \lambda + 1 \end{array} \right.$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.