

Devoir Maison 8

Ce devoir maison est facultatif, son corrigé sera mis en ligne à la fin des vacances.

Problème : calcul de l'intégrale de Dirichlet

1) Définition et existence de l'intégrale de Dirichlet

Soit $A \in [2\pi, +\infty[$.

- a) Justifier que la fonction $f(t) = \frac{\sin(t)}{t}$ est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$.
- b) En déduire l'existence de $\int_0^A f(t) dt$.
- c) Montrer que $\int_{2\pi}^A \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{1 - \cos(A)}{A} + \int_{2\pi}^A \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$.
- d) Montrer que la fonction $A \mapsto \int_{2\pi}^A \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$ admet une limite finie en $+\infty$.
- e) En déduire que $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{\sin(t)}{t} dt$ existe et est finie, on la note I dans la fin du problème.

L'an prochain, cette limite sera notée $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ et appelée *intégrale généralisée de Dirichlet*.

2) Des intégrales qui seront utiles

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit, pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}]$ les fonctions $f_n : x \mapsto \frac{\sin((2n+1)x)}{x}$ et $g_n : x \mapsto \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)}$.

- a) Justifier que f_n et g_n sont prolongeables en des fonctions continues sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

L'existence de ces prolongements par continuité permet de définir, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les intégrales :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x) dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g_n(x) dx$$

- b) Montrer que, pour tout entier n on a : $I_n = \int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{t} dt$.
- c) Rappeler la formule qui permet de factoriser $\sin(a) - \sin(b)$, à a et b sont des réels.
- d) Montrer que la suite $(J_n)_n$ est constante, et calculer la valeur de cette suite.
- e) Pour $n \in \mathbb{N}$, donner une expression de $I_n - J_n$ sous la forme d'une seule intégrale.

3) Lemme de Lebesgue

Soit $a < b$ deux réels et g une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[a, b]$.

On pose, pour tout entier naturel n , $L_n = \int_a^b g(x) \sin(nx) dx$.

Montrer en utilisant une intégration par parties que la suite (L_n) converge vers 0.

4) Une fonction annexe

On définit la fonction φ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par :

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

- a) Montrer que φ est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
- b) Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

5) Conclusion

Calculer de deux façons la limite de la suite $(I_n - J_n)$ et en déduire la valeur de l'intégrale I .