Devoir en autonomie

Les deux parties sont indépendantes.

Partie I

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad , \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}\frac{1}{n!}$$

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont strictement monotones, et donner leur sens de variation.
2. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.
3. En déduire que, pour tout entier naturel non nul q :
$$u_q < e < v_q$$
4. On cherche à montrer que e est irrationnel. A cet effet, on suppose qu'il existe deux entiers naturels non nuls p et q, premiers entre eux, tels que :
$$e = \frac{p}{q}$$
En multipliant la double inégalité précédente par $q!$, montrer que c'est impossible, et conclure sur l'irrationalité de e.
5. On considère la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N}^* : w_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} u_k}{n}$$
   a) Soit ε un réel strictement positif. Montrer qu'il existe un rang n_0 tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$:
$$|u_n - e| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$
   b) Montrer qu'il existe un rang, n_1 tel que pour tout entier $n \geqslant n_1$:
$$|w_n - e| \leqslant \varepsilon$$
   c) Quelle est la limite de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

Partie Il

On considère la fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$. telle que :

$$g(0) = 0 \quad , \quad \forall x \in]0,1] : g(x) = x\ln(x)$$

1. Etudier la continuité et les variations de la fonctions g et donner l'allure de sa courbe représentative. Justifier que $M = \sup\limits_{x\in[0,1]} |g(x)|$ existe et donner sa valeur.
2. On définit la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $t_0 \in \left]\frac{e^{-1}}{3}, e^{-1}\right[$ et pour tout entier naturel n :
$$t_{n+1} = -g(t_n)$$
Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n :
$$t_0 \leqslant t_n \leqslant t_{n+1} \leqslant e^{-1}$$

3. En écrivant l'inégalité de Taylor-Lagrange á l'ordre 1, montrer que, pour tout réel $x \in \left[t_0, e^{-1}\right]$, on a :

$$\left|g(x) - g\left(e^{-1}\right)\right| \leqslant \frac{\left|x - e^{-1}\right|^2}{2t_0}$$

4. En déduire que, pour tout entier naturel non nul n :

$$\left|t_n - e^{-1}\right| \leqslant 2t_0 \left(\frac{e^{-1} - t_0}{2t_0}\right)^{2^n}$$

5. Quelle est la limite de la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

6. On pose :

$$I = \int_0^1 x^{-x} dx$$

   a) Montrer que I est une intégrale convergente.

   b) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n :

$$I = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 x^k \ln^k x dx + \int_0^1 \tilde{R}_n(x)\, dx$$

   où on exprimera $\tilde{R}_n$, à l'aide de la fonction R_n définie par : $R_n(t) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \frac{t^k}{k!}$.

   c) On admet que, pour tout entier naturel n :

$$\left|\int_0^1 \tilde{R}_n(x)\, dx\right| \leqslant \frac{e^{1/e}}{e^{n+1}}$$

   d) Pour tout couple d'entiers naturels (p, q), on pose :

$$I_{p,q} = \int_0^1 x^p \ln^q x dx$$

      i. Montrer que $I_{p,q}$ est une intégrale convergente.

      ii. Montrer que, pour tout couple d'entiers $(p, q)) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$:

$$I_{p,q} = -\frac{q}{p+1} I_{p,q-1}$$

      iii. Exprimer $I_{p,q}$ en fonction de p et q.

   e) Montrer que

$$I = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$$

Corrigé

Partie I

1. Pour tout n : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)!} > 0$. $\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est strictement croissante.}}$

   Calculons pour n entier naturel non nul $v_{n+1} - v_n$:

   $$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} + \frac{1}{n+1}\frac{1}{(n+1)!} - u_n - \frac{1}{n}\frac{1}{n!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{n+1}\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n}\frac{1}{n!} \\ &= \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1)((n+1)!)} \\ &= \frac{n^2 + 2n - (n^2 + 2n + 1)}{n(n+1)((n+1)!)} \\ &= \frac{-1}{n(n+1)((n+1)!)} < 0 \end{aligned}$$

   $\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ est strictement décroissante.}}$

2. $v_n - u_n = \dfrac{1}{n}\dfrac{1}{n!}$ tend clairement vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

   Les deux suites étant de plus l'une croissante et l'autre décroissante, on conclut donc par définition :

   $\boxed{\text{Les suites } (u_n) \text{ et } (v_n) \text{ sont adjacentes.}}$

3. Les deux suites étant adjacentes, elles convergent vers la même limite. Or u_n est la somme partielle de la série exponentielle pour la variable $x = 1$ donc, d'après le cours, la suite (u_n) tend vers e.

   De plus (u_n) croit strictement vers e tandis que (v_n) décroit strictement vers e, ainsi :

   $\boxed{\text{pour tout entier naturel non nul } q : u_q < e < v_q}$

4. On suppose que $e = \dfrac{p}{q}$ avec p et q entiers naturels premiers entre eux. En multipliant la relation précédente par $q!$ on obtient :

   $q!u_q < p(q-1)! < q!v_q = q!u_q + \dfrac{1}{q}$.

   Or, $q!u_q = \displaystyle\sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!}$: chaque terme de cette somme est un entier, donc $N_0 = q!u_q \in \mathbb{N}$. Mais $N_1 = p(q-1)!$ est aussi un entier, et $\dfrac{1}{q} \leqslant 1$. On a donc obtenu $N_0 < N_1 < N_0 + 1$ avec N_0 et N_1 entiers : ceci est impossible.

   Par l'absurde, on en déduit que $\boxed{e \text{ est irrationnel}}$.

5. a) Comme (u_n) tend vers e, la définition de la limite s'écrit :

   $\forall \varepsilon_1 > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, |u_n - e| \leqslant \varepsilon_1$

   En prenant $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{2}$, on peut affirmer que :

   $\boxed{\text{il existe un rang } n_0 \text{ tel que pour tout entier } n \geqslant n_0 \text{ on a : } |u_n - e| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}}$

   5. b) Soit n_0 convenant pour la question précédente et $n \geqslant n_0$.

   $w_n - e = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n_0}(u_k - e) + \dfrac{1}{n}\sum_{k=n_0+1}^{n}(u_k - e)$. Notons $A = \displaystyle\sum_{k=0}^{n_0}|u_k - e|$.

   $|w_n - e| \leqslant \dfrac{A}{n} + \dfrac{1}{n}(n - n_0)\dfrac{\varepsilon}{2} \leqslant \dfrac{A}{n} + \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Or $\dfrac{A}{n} \to 0$ lorsque n tend vers $+\infty$ donc devient plus petit que $\dfrac{\varepsilon}{2}$ à partir d'un rang n_2.
On pose alors : $n_1 = \max(n_0, n_2)$ pour enchaîner les deux majorations, et on obtient :

$\boxed{\text{Il existe un rang } n_1 \text{ tel que pour tout entier } n \geqslant n_1 \text{ , } |w_n - e| \leqslant \varepsilon}$

5. c) On vient de montrer que pour tout réel strictement positif ε, il existe un entier naturel n_1, tel que pour tout entier naturel $n \geqslant n_1$ on a : $|w_n - e| \leqslant \varepsilon$: c'est exactement la définition de la limite d'une suite. On a donc montré que :

$\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = e}$

Rem : On a ainsi démontré dans ce cas particulier le *théorème de Césàro* qui annonce que la suite des moyennes arithmétiques d'une suite convergente converge vers la même limite que cette suite.

Partie II

1. Sur $]0,1]$, g s'exprime comme le produit d'une fonction polynomiale par la fonction ln , qui sont toutes deux $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. g est donc en particulier continue sur $]0,1]$.
   De plus on sait que : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} (x \ln(x)) = 0$ et on a posé $g(0) = 0$, donc g est continue en 0.

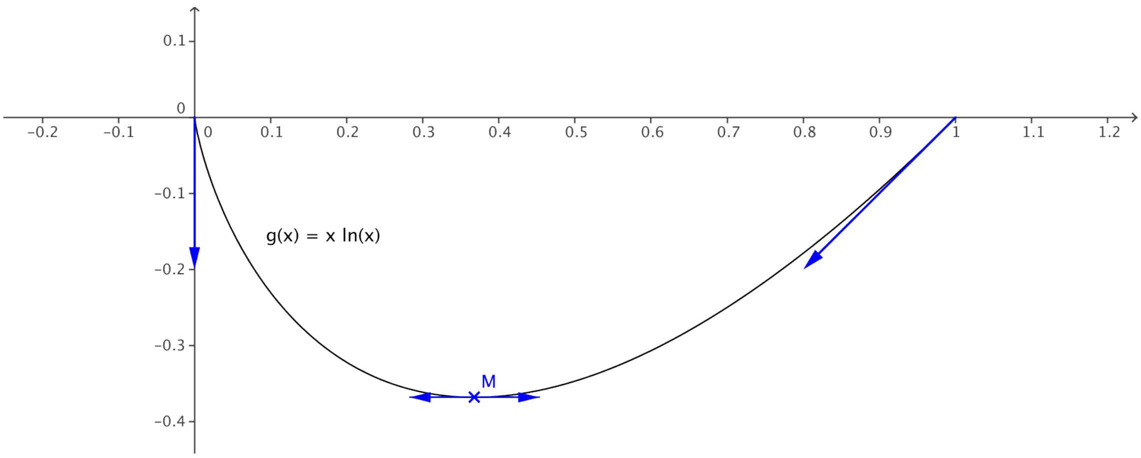
   Donc :

$$\boxed{g \text{ est continue sur } [0,1]}$$

   $\forall x \in]0,1], g'(x) = \ln(x) + 1.$
   Ainsi, pour $x \in]0,1]$, $g'(x) > 0 \Leftrightarrow x > e^{-1}$

$$\boxed{\begin{array}{l} g \text{ est donc décroissante de la valeur } 0 \text{ à la valeur } g(e^{-1}) = -e^{-1} \text{ sur} \\ ]0, e^{-1}], \text{ puis croissante jusqu'à la valeur } g(1) = 0 \text{ sur } [e^{-1}, 1]. \end{array}}$$

   De plus $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} g'(x) = -\infty$, la courbe représentative de g présente donc une tangente verticale en $x = 0$ à droite.



   D'après l'étude des variations, la fonction g réalise son minimum en e^{-1}, et comme g est négative, $|g|$ réalise un maximum en ce point. Donc :

$$\boxed{M = \sup_{x \in [0,1]} |g(x)| \text{ existe et vaut } e^{-1}}$$

2. $-g$ est strictement croissante sur $[0, e^{-1}]$, donc sur $]\dfrac{e^{-1}}{3}, e^{-1}[$.

Or $-g\left(\dfrac{e^{-1}}{3}\right) = e^{-1}\dfrac{1+\ln(3)}{3} \in \left]\dfrac{e^{-1}}{3}, e^{-1}\right[$ (car $\ln(3) \in]0,2[$) et $-g(e^{-1}) = e^{-1}$, donc $\left]\dfrac{e^{-1}}{3}, e^{-1}\right[$ est stable par $-g$.

Par ailleurs, pour $x \in \left]\dfrac{e^{-1}}{3}, e^{-1}\right[$, $-g(x) - x = -x(\ln(x)+1) = -xg'(x) \geqslant 0$.

Donc, si $t_n \in \left]\dfrac{e^{-1}}{3}, e^{-1}\right[$, d'une part $t_{n+1} = -g(t_n) \in \left]\dfrac{e^{-1}}{3}, e^{-1}\right[$ par stabilité, ce qui permet de dire que $t_{n+1} \leqslant e^{-1}$, d'autre part $-g(t_n) - t_n \geqslant 0$ donc $t_{n+1} \geqslant t_n$.

La suite est donc bien croissante et ses termes sont dans $\left]\dfrac{e^{-1}}{3}, e^{-1}\right[$

Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, t_0 \leqslant t_n \leqslant t_{n+1} \leqslant e^{-1}}$$

3. L'inégalité de Taylor-Lagrange s'énonce sous la forme :

Pour f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur l'intervalle I et $(a,b) \in I^2$, on suppose l'existence dans $\mathbb{R}$ de $M_{n+1} = \sup\limits_{x \in I} \lvert f^{(n+1)}(x) \rvert$. On a alors : $$\left\lvert f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\rvert \leqslant \frac{\lvert b-a\rvert^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}$$

Appliquons l'inégalité de Taylor Lagrange à la fonction g à l'ordre $n = 1$ sur le segment $I = [t_0, e^{-1}]$, en prenant $a = e^{-1}$ et $b = x \in I$.

g'' est continue sur le segment I donc elle y est bornée : $\forall t \in I, g''(t) = \dfrac{1}{t}$. Cette fonction est décroissante et positive et $\lvert g''(t)\rvert$ atteint donc son maximum sur I en t_0. D'où : $M_2 = \dfrac{1}{t_0}$.

Comme $g'(e^{-1}) = 0$, l'expression $f(b) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$ se réduit à $g(x) - g(e^{-1})$.

On obtient donc

$$\boxed{\forall x \in [t_0, e^{-1}], \left\lvert g(x) - g(e^{-1}) \right\rvert \leqslant \frac{(x - e^{-1})^2}{2t_0}}$$

4. Démontrons le résultat attendu par récurrence sur l'entier $n \in \mathbb{N}^*$

<u>Initialisation :</u> Pour $n = 1$,

$\lvert t_n - e^{-1}\rvert = \lvert t_1 - e^{-1}\rvert = \lvert -g(t_0) + g(e^{-1}\rvert = \lvert g(t_0) - g(e^{-1}\rvert \leqslant \dfrac{(t_0 - e^{-1})^2}{2t_0}$ d'après la question précédente.

Or : $\dfrac{(t_0 - e^{-1})^2}{2t_0} = 2t_0 \dfrac{(t_0 - e^{-1})^2}{(2t_0)^2} = 2t_0 \left(\dfrac{t_0 - e^{-1}}{2t_0}\right)^{2^n}$

La propriété est donc vérifiée au rang $n = 1$.

<u>Hérédité :</u> Soit $n \geqslant 1$ un entier. Supposons que $\lvert t_n - e^{-1}\rvert \leqslant 2t_0 \left(\dfrac{t_0 - e^{-1}}{2t_0}\right)^{2^n}$ et montrons que : $\lvert t_{n+1} - e^{-1}\rvert \leqslant 2t_0 \left(\dfrac{t_0 - e^{-1}}{2t_0}\right)^{2^{(n+1)}}$.

$$
\begin{aligned}
|t_{n+1} - e^{-1}| = & \quad |-g(t_n) + g(e^{-1})| \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad \hookleftarrow \text{ d'après II.3) avec } x = t_n \\
\leqslant & \quad \frac{|t_n - e^{-1}|^2}{2t_0} \\
& = 2t_0 \frac{(t_n - e^{-1})^2}{(2t_0)^2} \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad \hookleftarrow \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\
& \leqslant 2t_0 \frac{1}{(2t_0)^2} \left(2t_0 \left(\frac{t_0 - e^{-1}}{2t_0} \right)^{2^n} \right)^2 \\
& = 2t_0 \left(\frac{t_0 - e^{-1}}{2t_0} \right)^{2^{(n+1)}}
\end{aligned}
$$

C'est bien ce qu'il fallait obtenir.
Conclusion : Nous avons prouvé que la propriété est vraie au rang $n = 1$ et qu'elle est héréditaire. D'après le principe de récurrence, cette propriété est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

$$
\boxed{\forall n \geqslant 1, |t_n - e^{-1}| \leqslant 2t_0 \left(\frac{t_0 - e^{-1}}{2t_0} \right)^{2^n}}
$$

5. Comme $t_0 > \frac{e^{-1}}{3} > 0$ on aura $\frac{1}{2t_0} < \frac{3}{2e^{-1}}$ et $0 \leqslant e^{-1} - t_0 < \frac{2}{3}e^{-1}$.
Donc $0 < k = \frac{t_0 - e^{-1}}{2t_0} < 1$ et par conséquent la suite (k^{2^n}) tend vers zéro. D'après l'encadrement de la question précédente, la suite $(t_n - e^{-1})$ tend aussi vers zéro.
D'où :

$$
\boxed{\lim_{n \to +\infty} t_n = e^{-1}}
$$

6. a) La fonction $x \mapsto x^{-x} = e^{-g(x)}$ est prolongeable par continuité sur $[0, 1]$ puisque g l'est. Donc l'intégrale I est faussement impropre. Donc $\boxed{I \text{ est convergente.}}$

6. b) Pour tout réel t, on peut écrire : $e^t = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} + R_n(t)$ en posant $R_n(t) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{t^k}{k!}$.
En particulier, pour $x \in]0, 1]$ et en posant $t = -g(x)$,

$$
x^{-x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} x^k \ln^k(x) + R_n(-g(x)) \qquad (1)
$$

Notons $\widetilde{R}_n : x \mapsto R_n(-g(x))$
Comme g est prolongeable par continuité en 0, pour tout k entier naturel $x \mapsto x^k \ln^k(x)$ l'est aussi, donc chaque intégrale $\int_0^1 x^k \ln^k(x) \mathrm{d}x$ est convergente. Comme I converge également, on en déduit par linéarité de l'intégrale que $\int_0^1 \widetilde{R}_n(x) \mathrm{d}x$ est convergente aussi.
En intégrant alors (1) terme à terme on obtient bien l'identité souhaitée :

$$
I = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 x^k \ln^k(x) \mathrm{d}x + \int_0^1 \widetilde{R}_n(x) \mathrm{d}x
$$

6. c) On admet que

$$
\left| \int_0^1 \tilde{R}_n (x) \, dx \right| \leqslant \frac{e^{1/e}}{e^{n+1}}
$$

6. d.i) Si $p \geqslant 1$, la fonction $x \mapsto x^p \ln^q(x)$ est continue sur $]0,1]$ et tend vers 0 en 0. $I_{p,q}$ est donc faussement impropre.
Si $p = q = 0$, on intègre sur $]0,1]$ la fonction constante égale à 1 donc l'intégrale converge.
Pour $p = 0$ et $q \geqslant 1$, on sait par croissances comparées usuelles que : $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} \ln^q x = 0$ donc $|\ln^q x| = o_0\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$.
Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$ est une intégrale de Riemann convergente donc, par comparaison de fonctions positives, $I_{0,q}$ est absolument convergente et donc convergente.
Ainsi, pour tout couple (p,q) d'entiers naturels, on a montré que :
$\boxed{I_{p,q} \text{ est convergente}}$
6. d.ii) Prenons $X \in]0,1]$, par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_X^1 x^p \ln^q(x) \mathrm{d}x &= \left[\frac{x^{p+1}}{p+1} \ln^q(x)\right]_X^1 - \int_X^1 \left(\frac{x^{p+1}}{p+1}\right)\left(\frac{q}{x} \ln^{q-1}(x)\right) \mathrm{d}x \\ &= -\frac{X^{p+1}}{p+1} \ln^q(X) - \frac{q}{p+1} \int_X^1 x^p \ln^{q-1}(x) \mathrm{d}x\end{aligned}$$

En faisant tendre X vers zéro par valeurs supérieures on obtient le résultat demandé :

$$\boxed{I_{p,q} = -\frac{q}{p+1} I_{p,q-1}}$$

6. d.iii) On fixe $p \in \mathbb{N}$. $I_{p,0} = \dfrac{1}{p+1}$. D'après la formule précédente, on a alors :
$I_{p,1} = -\dfrac{1}{(p+1)^2}$, $I_{p,2} = \dfrac{2}{(p+1)^3}$, $I_{p,3} = -\dfrac{3 \times 2}{(p+1)^4}$.
On peut alors conjecturer : $I_{p,q} = (-1)^q \dfrac{q!}{(p+1)^{q+1}}$.
La propriété est vérifiée pour $q = 0$ et on montre l'hérédité à l'aide de d.ii) (à rédiger).
On conclut donc par récurrence que la formule est vraie pour tout $q \in \mathbb{N}$, et ceci quel que soit l'entier p fixé. On a donc montré que :

$$\boxed{\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, I_{p,q} = (-1)^q \frac{q!}{(p+1)^{q+1}}}$$

6. e) D'après 6.b,

$$\begin{aligned}I &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} I_{k,k} + \int_0^1 \widetilde{R}_n(x) \mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} (-1)^k \frac{k!}{(k+1)^{k+1}} + \int_0^1 \widetilde{R}_n(x) \mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^{k+1}} + \int_0^1 \widetilde{R}_n(x) \mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(k)^k} + \int_0^1 \widetilde{R}_n(x) \mathrm{d}x\end{aligned}$$

De plus 6.c permet de dire par encadrement que le reste $\displaystyle\int_0^1 \widetilde{R}_n(x) \mathrm{d}x$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Donc, la série numérique $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{n^n}$ est convergente et de somme I .

$$\boxed{I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^n}}$$