PC	DM n°3

A rendre le mercredi 13 novembre.

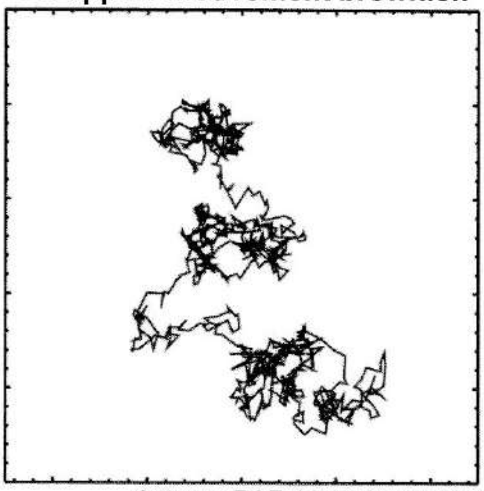
Consignes :

– vous rendrez 1 copie de DM par trinôme de colle. Vous êtes donc encouragés à communiquer et travailler en groupe, même si une phase de recherche individuelle est bien entendue possible ;
– chaque membre du trinôme doit savoir faire les trois exercices, mais n'en rédige qu'un au propre sur la copie de DM commune ;
– pendant la semaine de la rentrée, une correction du DM est disponible auprès du professeur ; vous êtes invités à la consulter avant /après un cours pour : vérifier vos réponses, vos raisonnements ou vous débloquer sur une question. Vous avez le droit de prendre des notes sur une feuille ou un cahier, mais pas de prendre la correction en photo.
– Le but final est de rendre une copie juste ou quasi-juste, dont la rédaction est rigoureuse et soignée. Les notes de DM doivent donc être bonnes voire très bonnes !
– Exercices obligatoires : 1, 2 et 3. Exercice bonus (plus difficile, type Mines-Ponts) : 4.

Exercice n°1 : Diffusion d'un parfum

La diffusion de particules permet de décrire la progression spatio-temporelle d'un ensemble de particules dans un milieu (gaz, liquide ou solide). A l'échelle microscopique, la diffusion moléculaire s'interprète de façon statistique. Après une étude unidimensionnelle de la diffusion d'un parfum au voisinage de la peau, on se propose de déterminer l'ordre de grandeur d'un coefficient de diffusion dans l'air à l'aide d'un modèle statistique microscopique.

Le déplacement aléatoire d'une particule dans un milieu est appelé mouvement brownien

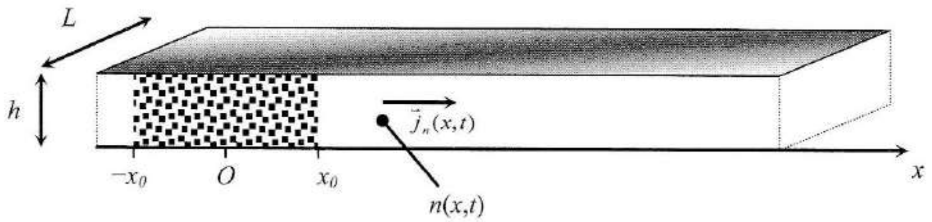


Auteur : PAR (domaine public)

La diffusion d'un parfum dans l'air peut avoir des conséquences…physiques !
Lorsqu'un parfum est pulvérisé sur la peau, le solvant, volatile, s'évapore et des molécules odorantes se retrouvent dans l'air et diffusent. On considère un modèle unidimensionnel permettant d'accéder à la concentration $n(x,t)$ en parfum dans une couche d'air de largeur L et d'épaisseur h le long d'un axe Ox au voisinage de la peau. Après avoir pulvérisé du parfum sur la peau dans la zone comprise entre $-x_0$ et $+x_0$, il apparaît K molécules de parfum par unité de volume et par unité de temps dans la couche d'air correspondante.

On appelle D le coefficient de diffusion du parfum dans l'air et on note $\vec{j}_n(x,t) = j_n(x,t)\,\vec{e}_x$ le vecteur densité de courant de particules, la diffusion se faisant uniquement le long de l'axe Ox.

Les molécules de parfum apparaissent dans la zone comprise entre $-x_0$ et x_0 puis diffusent le long de l'axe



Le problème étant symétrique de part et d'autre de l'origine O, on cherche le profil de concentration uniquement pour $x > 0$.

1) A l'aide d'un bilan de particules dans la tranche située entre x et $x + dx$ entre les instants t et $t + dt$, établir l'équation différentielle vérifiée par la concentration $n(x,t)$ pour $0 < x < x_0$. Que devient cette équation pour $x > x_0$?

2) Comment évoluerait la concentration pour $0 < x < x_0$ si l'on empêchait la diffusion en $x = x_0$? Un régime stationnaire peut-il être possible ?

On cherche à étudier le profil de concentration $n(x)$ en régime stationnaire.

3) Etablir l'équation vérifiée par $n(x)$ dans chaque zone $0 < x < x_0$ et $x > x_0$. En déduire l'expression générale de $n(x)$ dans chaque zone en introduisant quatre constantes d'intégration.

4) Préciser les conditions aux limites en $x = 0$ et en $x = x_0$. En déduire l'expression des constantes d'intégration précédentes. On notera $n(0) = n_0$.

5) Tracer l'allure du profil de concentration en régime stationnaire et interpréter graphiquement les conditions aux limites obtenues à la question précédente. Discuter brièvement la validité du modèle proposé.

6) Effectuer un bilan global de particules dans la zone $0 < x < x_0$. Commenter.

Une bouteille de parfum contenant 50 mL du précieux liquide (de masse molaire 100 g.mol^{-1} et de masse volumique 10^3 kg.m^{-3}) dure en moyenne 6 mois à raison de 2 pulvérisations par jour. Chaque pulvérisation sur la peau, sur une zone de 2 cm de côté, fait effet durant environ 5 heures.

7) Evaluer numériquement K. On prendra pour ce modèle $h = 5$ mm et $L = 2$ cm.

Exercice n°2 : Température du corps humain en plongée

Le but est de décrire les processus de transfert thermique entre le corps d'un plongeur sous-marin et l'eau. On note $T_{\text{int}}(t)$ la température interne du plongeur à l'instant t, supposée uniforme, et T_{ext} la température de l'eau.

► L'ensemble {périphérie du corps humain + derme} est assimilé à une résistance thermique notée R_1.

► Le plongeur est équipé d'une combinaison en néoprène d'épaisseur $e = 5\,\text{mm}$. Le contact thermique entre la peau du plongeur et l'intérieur de la combinaison est supposé parfait. Le néoprène est une mousse remplie de bulles de diazote. Une fois la combinaison gorgée d'eau, sa conductivité thermique est $K \simeq 5{,}4 \cdot 10^{-2}\,\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. On note R_{comb} la résistance thermique associée.

► Les transferts thermiques entre la paroi externe de la combinaison et l'eau sont modélisés par la loi de Newton donnant le courant thermique conducto-convectif sortant,

$$\vec{j}_{q_{\text{cc}}} = h\,(T_{\text{paroi}} - T_{\text{ext}})\,\vec{n}_{\text{sortant}}\,,$$

où $\vec{n}_{\text{sortant}}$ est la normale unitaire sortante et $h \simeq 2 \cdot 10^2\,\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ un paramètre phénoménologique. On note R_{cc} la résistance thermique associée à ce transport.

► Les transferts radiatifs (rayonnement de type infrarouge) de la paroi vers l'extérieur sont modélisés par la loi de Stefan (admise) donnant le flux radiatif global,

$$\Phi_{\text{rad}} = \varepsilon\,\sigma\,S\,(T_{\text{paroi}}^4 - T_{\text{ext}}^4)\,,$$

où S est l'aire de l'interface, $\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8}$ SI est la constante de Stefan et $\varepsilon \in [0{,}1]$ le pouvoir d'émissivité traduisant l'efficacité des processus radiatifs.

1. Montrer que, si l'écart entre T_{paroi} et T_{ext} est faible, Φ_{rad} est approximativement proportionnel à $(T_{\text{paroi}} - T_{\text{ext}})$. Déterminer la constante de proportionnalité. (Indication : poser $\alpha = T_{\text{paroi}} - T_{\text{ext}}$ et utiliser le fait que α est petit devant les températures mises en jeu pour faire un développement limité.) Définir et donner l'expression de R_{rad}, résistance thermique associée au transport radiatif.

2. Exprimer R_{cc} en fonction de h et S.

3. Proposer le schéma électrique équivalent permettant de déterminer la résistance thermique totale R_{tot} entre l'intérieur du corps humain et l'eau. En déduire l'expression du flux thermique global Φ_{th} en fonction de $T_{\text{int}}(t)$, T_{ext} et R_{tot}.

4. On cherche à simplifier l'expression de R_{tot}.

► Montrer que le processus de transfert radiatif est négligeable dans le schéma précédent (il sera négligé dans la suite).

► Estimer la valeur de R_{comb} et montrer que R_{cc} peut être négligée.

5. Le corps humain dégage de l'énergie thermique grâce aux molécules d'ATP. On note $\mathcal{P}_{\text{ATP}}$ la puissance associée à cette production interne, C la capacité thermique massique du corps humain, et M la masse du plongeur.

5.a. Établir une équation différentielle permettant de déterminer la température T_{int} du plongeur en fonction du temps.

5.b. En supposant $\mathcal{P}_{\text{ATP}}$ constante dans le temps, déterminer l'expression de la température $T_{\text{int}}(t)$ en fonction de R_{tot}, T_{ext}, $\mathcal{P}_{\text{ATP}}$, C, M et $T_{\text{int}}(0)$.

5.c. L'état d'hypothermie est atteint lorsque la température du plongeur passe en dessous de $T_{\text{int}} = 35\,°\text{C}$. Sachant que $T_{\text{ext}} = 15\,°\text{C}$, $\mathcal{P}_{\text{ATP}} \simeq 1{,}5 \cdot 10^2\,\text{W}$, $T_{\text{int}}(0) = 37\,°\text{C}$, $C \simeq 4 \cdot 10^3\,\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, $M \simeq 70\,\text{kg}$ et $R_1 = 8 \cdot 10^{-2}\,\text{K} \cdot \text{W}^{-1}$, déterminer le temps t_{h} au bout duquel l'hypothermie est atteinte. Commenter le résultat et le modèle.

Exercice n°3 : Température dans la Terre

Dans cet exercice, on fait les hypothèses suivantes.

► La Terre est assimilée à une sphère homogène de rayon $R_T = 6\,380\,\text{km}$ et de masse volumique uniforme ϱ.

► La température à l'intérieur de la Terre est une fonction de r (symétrie sphérique) notée $T(r)$. La température à la surface de la Terre est $T_s = 290\,\text{K}$.

► Le régime est permanent.

► La conductivité thermique de la Terre, notée λ, est supposée uniforme.

1. Expliquer qualitativement pourquoi la température de la Terre est une fonction décroissante de r. Dans la modélisation (extrêmement simplifiée) adoptée, on définit deux zones.

► Du centre de la Terre jusqu'à la lithosphère d'épaisseur $R_T - R_L = 100\,\text{km}$, soit pour $r \in [0, R_L]$, on suppose qu'il n'y a aucune production d'énergie.

► Pour l'ensemble de la lithosphère, soit pour $r \in [R_L, R_T]$, on tient compte de la source d'énergie thermique que constitue la radioactivité d'éléments, essentiellement l'uranium.

2. À l'aide d'un bilan d'énergie portant sur un élément mésoscopique bien choisi, montrer que la température satisfait, pour $r \in [0, R_L]$, l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r^2 \frac{\mathrm{d}T(r)}{\mathrm{d}r}\right] = 0\,.$$

3. Retrouver cette équation en partant de l'équation de la diffusion thermique généralisée à trois dimensions et en utilisant l'expression de l'opérateur laplacien en coordonnées sphériques (voir annexe A page 389).

4. Intégrer cette relation afin d'obtenir l'évolution de la température en fonction de r. Cela fait apparaître deux constantes d'intégration notées A et B. Quelle condition aux limites permet de déterminer facilement la valeur d'une de ces deux constantes ? Conclure sur la pertinence du modèle.

La source radioactive apporte, dans la lithosphère, une puissance thermique par unité de masse, $\alpha = 5 \cdot 10^{-10}\,\text{W} \cdot \text{kg}^{-1}$, que l'on supposera constante.

5. En procédant comme à la question 2, établir l'équation différentielle vérifiée par T pour $r \in [R_L, R_T]$.

6. En déduire l'évolution de la température dans la lithosphère en fonction de r, de différents paramètres et de deux constantes d'intégration C et D.

7. Quelles conditions aux limites doit-on appliquer à la lithosphère ? En déduire C et D en fonction de T_s, R_L, R_T, ϱ, α et λ. Donner l'expression complète de la température en fonction de r dans la lithosphère.

8. Déduire de ce qui précède la température T_c au centre de la Terre et faire l'application numérique avec $\varrho = 2{,}8 \cdot 10^3\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et $\lambda = 4{,}0\,\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

9. Déterminer le gradient de température à la surface de la Terre et faire l'application numérique. En déduire la valeur du flux thermique global sortant de la Terre.

Exercice n°4 : (BONUS, d'après oral Mines-Ponts) Température dans la Terre

Un astéroïde solide, sphérique de rayon R, se trouve dans l'espace vide. On note λ sa conductivité thermique. Il est radioactif, de telle sorte qu'une énergie $\mathrm{d}\mathcal{P}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t$ est créée pendant $\mathrm{d}t$ dans un élément de volume $\mathrm{d}\tau$, où $\mathcal{P}$ est une constante. Déterminer le champ de température à l'équilibre dans l'astéroïde, en supposant qu'il évacue à sa surface une puissance σT_S^4, où T_S est sa température de surface et σ la constante de Stefan.