Devoir maison n°4

A faire pour le lundi 2 mars

<u>PROBLEME 1:</u> Proton accéléré par le complexe d'accélérateurs du LHC au CERN

Le Grand Collisionneur de Hadrons (LargeHadronCollider;LHC) est entré en fonctionnement en 2008. Il est situé dans un anneau de 27 kilomètres de circonférence et enterré à 100 m sous terre à la frontière franco-suisse, près de Genève. Le LHC est désormais le plus puissant des accélérateurs de particules au monde.

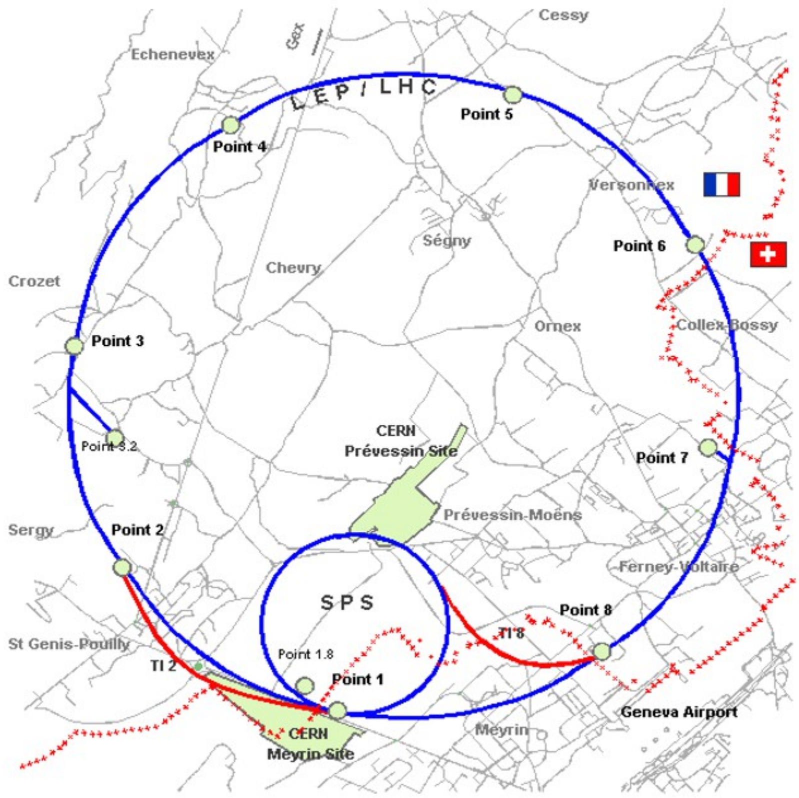


Figure 1 : Site du CERN, dans les environs de Genève. Le grand cercle représente la position du tunnel du LHC.

Dans les accélérateurs de particules, des protons (ou des ions) de très haute énergie circulant dans deux faisceaux tournant à contre-sens se choquent les uns contre les autres, dans le but de rechercher des indices de la supersymétrie, de la matière noire et de l'origine de la masse des particules élémentaires. Les faisceaux se composent de paquets contenant des centaines de milliards de protons chacun. Voyageant quasiment à la vitesse de la lumière, ils sont injectés, accélérés, et maintenus en circulation pendant des heures,guidés par des milliers d'aimants supraconducteurs puissants. L'énergie des protons est transformée au moment du choc en une myriade de particules exotiques, que les détecteurs observent avec attention. Le 04 juillet 2012, les chercheurs ont annoncé l'observation du boson de Higgs dont l'existence était prédite par le modèle standard.

<u>Précisions sur l'énoncé :</u>

Dans tout le problème, "exprimer" signifie donner l'expression littérale et "calculer" signifie donner la valeur numérique.

<u>Valeurs numériques :</u>

Masse du proton : $m_p \approx 1{,}6.10^{-27}\,kg$; Charge élémentaire : $e = 1{,}60.10^{-19}\,C$

Vitesse de la lumière : $c \approx 3{,}00.10^{8}\,m.s^{-1}$

Intensité de la pesanteur : $g \approx 10\,m.s^{-2}$

<u>Unités :</u> $1{,}00\,eV = 1{,}60.10^{-19}\,J$

Dans ce problème, nous étudions la trajectoire des protons dans le Large Hadron Collider. Le LHC est formé d'une succession d'accélérateurs, d'énergies toujours croissantes.

Chaque accélérateur injecte un faisceau dans la machine suivante, qui prend le relais pour porter ce faisceau à une énergie encore plus élevée, et ainsi de suite.

Tous les accélérateurs de particules sont composés de la même façon : une source de particules, des champs électriques accélérateurs, des champs magnétiques de guidage et finalement des détecteurs pour observer les particules et leurs collisions.

Première partie : Particule dans un champ électrique constant et uniforme

1. Quelle est la force que subit un proton plongé dans une région de l'espace où règne un champ électrique uniforme $\vec{E}$?

2. Montrer que l'on peut négliger le poids du proton devant la force générée par un champ $E = 100\text{kV.m}^{-1}$.

3. En utilisant le principe fondamental de la dynamique appliqué à un proton, exprimer l'accélération que ressent un proton dans une zone de l'espace ou règne un champ électrique uniforme $\vec{E}$.

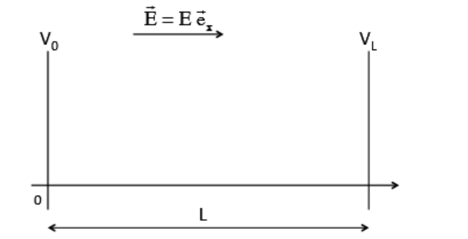


Figure 2 : Schéma du dispositif d'accélération des protons

4. La zone de l'espace où règne le champ $\vec{E} = E\,\vec{e}_x$ a une longueur L. Cette zone est représentée figure 2. Montrer que dans cette zone, la force électrique dérive d'une énergie potentielle pouvant s'écrire sous la forme : $E_p(x) = eV(x)$, *V(x)* ainsi défini étant le potentiel au point de l'espace d'abscisse x . *V(x)* est défini à une constante additive près K fixée par des conditions aux limites.

5. En considérant que le potentiel V_0 du plan $x=0$ est nul, exprimer le potentiel V_L du plan $x=L$.

6. En supposant que le proton entre dans la zone de champ avec une énergie cinétique négligeable, exprimer l'énergie cinétique du proton sortant de la zone d'accélération, en fonction de E puis de V_L .

Deuxième partie : Un accélérateur linéaire de particules : le Linac 2

L'accélérateur linéaire 2 (Linac 2) constitue le point de départ des protons utilisés dans les expériences menées au CERN. Les protons passent dans une série de conducteurs métalliques coaxiaux. On considère que le champ est nul à l'intérieur des conducteurs. Ces protons sont accélérés par une tension maximale U_C toutes les fois qu'ils passent d'un tube à l'autre. On considérera que la distance entre deux tubes est négligeable par rapport à la longueur des tubes. Les protons sont injectés en O avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0\,\vec{u}_z$ parallèle à l'axe de l'accélérateur et générée par une tension pré-accéleratrice U_0 .

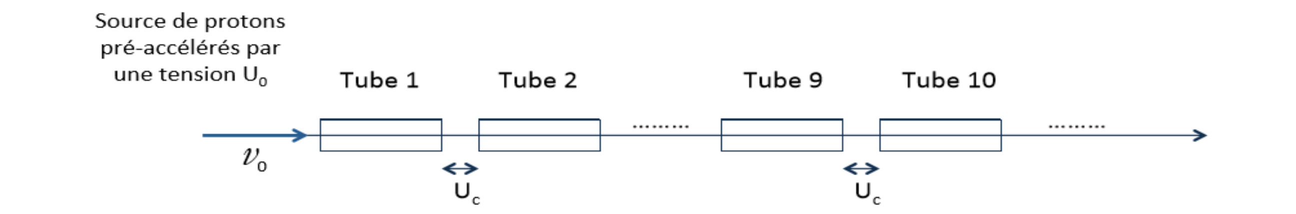


Figure 3 : Le linac 2

7. Quel est l'accroissement d'énergie cinétique ΔE_C de ces protons au passage entre deux tubes voisins ?

8. Exprimer leur énergie cinétique E_{Csn} à la sortie du n-ième tube en fonction de U_C et U_0 .

9. Calculer la valeur de la vitesse des protons à la sortie du 10ème tube pour $U_0 = 200\,kV$, $U_C = 2000\,kV$.

10. Sachant qu'une particule est considérée comme relativiste lorsque sa vitesse atteint le tiers de la vitesse de la lumière, ces protons sont-ils relativistes?

Troisième partie : Du linac 2 au synchroton à protons (PS)

Un élément fondamental du complexe accélérateur est le synchrotron à protons (PS). Pendant une courte période de l'histoire des grands instruments, le PS a été l'accélérateur produisant les plus hautes énergies du monde. Aujourd'hui, il sert principalement à alimenter le LHC. On considère un proton injecté en A dans le synchrotron où règne un champ

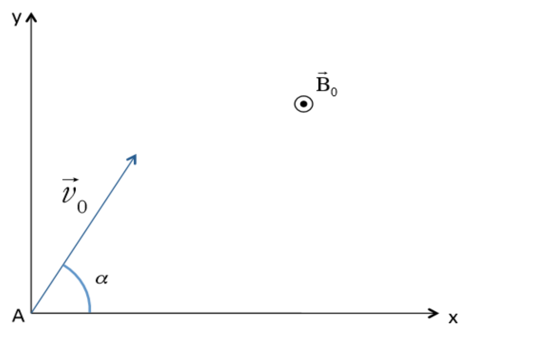


Figure 4 : Vitesse du proton dans le champ magnétique

magnétique statique et uniforme $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$. À t =0 sa vitesse $\vec{v}_0$ est perpendiculaire au champ magnétique conformément à la figure 4.

11. Donner le nom et l'expression vectorielle de la force que subit le proton soumis au champ magnétique $\vec{B}_0$. Pour les questions suivantes, on considère que le proton n'est soumis qu'à cette force.

12. Reproduire la figure 4 sur votre copie afin de représenter la force magnétique $\vec{F}_0$ subie par le proton en A. Exprimer la norme de cette force.

13. Montrer que le travail associé à cette force est nul. En déduire que le mouvement du proton est uniforme.

14. La trajectoire du proton est un cercle de rayon R et de centre O. Compléter la figure précédente et représenter la trajectoire.

15. Déterminer en repérant la particule par ses coordonnées polaires (à préciser sur une nouvelle figure) le rayon R de la trajectoire en fonction de m_p , B_0 , e et v_0 .

16. Quelle est la nature du mouvement du proton après sa sortie de la zone de champ magnétique?

PROBLEME 2: Expérience de Cavendish

Ce problème fait dans un premier temps le récit de l'expérience de Cavendish puis en propose une modélisation simple afin d'interpréter les résultats de l'expérience .

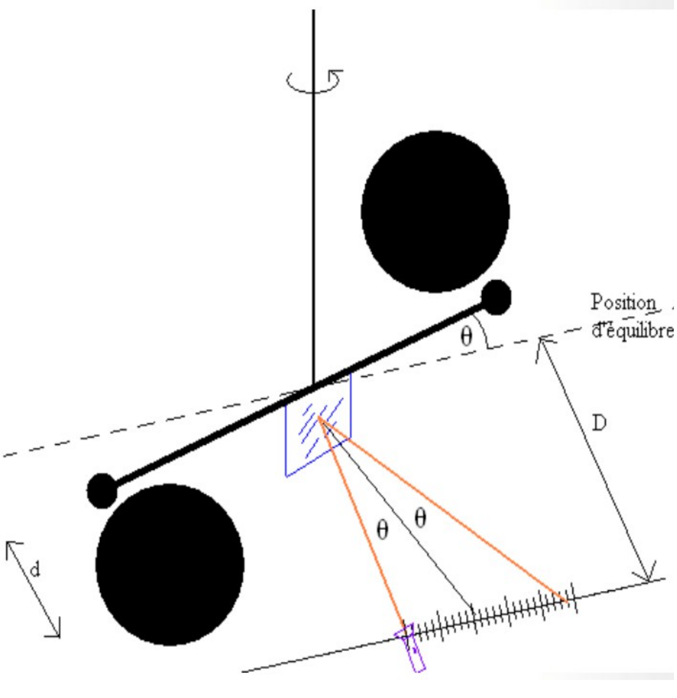
L'expérience de Cavendish :

Article tiré de :*http://astronomie-smartsmur.over-blog.com/article-4-16-la-constante-de-gravitation-102095019.html*

En 1798, Henry Cavendish décida d'utiliser un pendule de torsion pour calculer la constante de gravitation : Il crée donc un pendule constitué d'un câble très fin, de 0,05 millimètres (l'épaisseur d'un cheveu) en cuivre argenté de très faible force de torsion.

Au bout de ce câble, se trouve une baguette en bois rigide de 2 mètres de long, attachée au câble en son milieu. Enfin, deux boules de plomb de 730 grammes chacune et de 5 cm de diamètre sont fixées à chacune des extrémités de la baguette. L'ensemble constitue un pendule de torsion extrêmement sensible.

Au centre de la baguette, il fixe un petit miroir, parallèle à la baguette. En éclairant le miroir avec un rayon lumineux (aujourd'hui, on utiliserait un LASER), le rayon se réfléchit et retourne à son point de départ où se situe une règle. Lorsque le pendule oscille, le point lumineux sur la règle se déplace et si on connaît la distance séparant la règle de l'axe du pendule, alors la mesure sur la règle de ce déplacement nous permet de connaître l'angle avec lequel le pendule a tourné.



Une fois le pendule de Cavendish équilibré, il l'écarta très légèrement, et constata grâce au miroir et au faisceau lumineux qu'il oscillait autour de sa position d'équilibre avec une période d'oscillation T_0 de 7 minutes (420 secondes). Une fois T_0 connue, il pouvait calculer la constante de torsion C de son pendule.

Le système était si sensible que Cavendish dut enfermer son pendule dans une pièce spéciale car la moindre variation de température dans les éléments du système entraînait dans la pièce un courant d'air qui le faisait osciller. la moindre vibration le faisait aussi osciller. En fait, il ne pouvait même pas entrer dans la pièce et dut l'isoler en plaçant le système d'observation à l'extérieur.

Après plusieurs heures, le système était totalement immobile et stabilisé. Cavendish nota alors l'endroit exact ou le faisceau lumineux éclairait la règle.

C'est alors qu'il approcha comme sur le dessin deux grosses boules de plomb de 30 cm de diamètre et de 158 kg chacune à 22,5 cm (distance entre les deux centres) des petites boules. Il attendit à nouveau quelques temps que le pendule se stabilise à nouveau, et il constata que le faisceau lumineux s'était très légèrement décalé par rapport à sa position initiale.

Le décalage est très infime puisqu'avec une règle située à 5 mètres du miroir, il aurait observé une variation de 8,7 millimètres du faisceau. Avec les moyens de l'époque, vous imaginez la difficulté pour voir la différence entre 8,6 et 8,8 millimètres ! Vous n'avez qu'à prendre une règle pour vous rendre compte de ce que représente 0,1 millimètre !

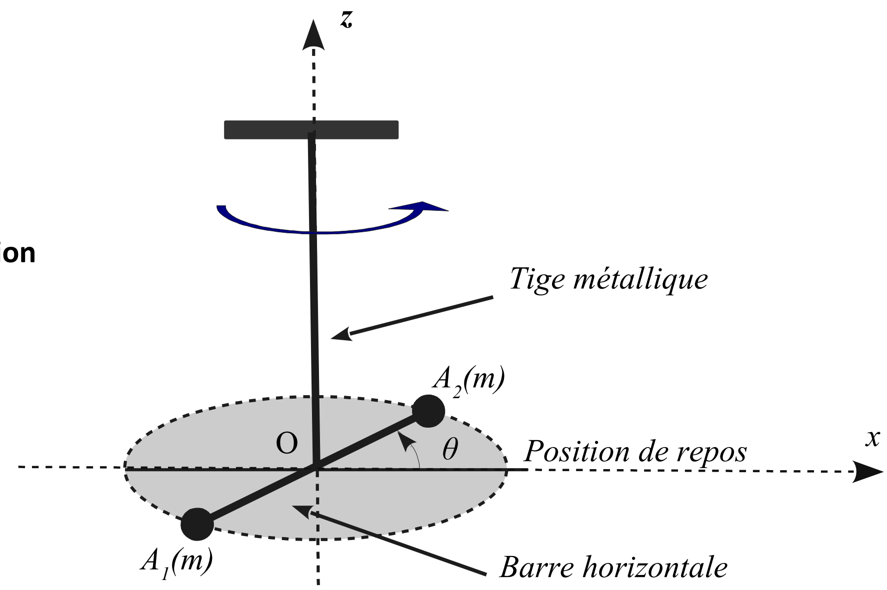
Vous voyez sur le schéma que le décalage observé sur la règle correspond à cause de l'effet miroir au double de l'angle avec lequel le pendule a tourné. Cavendish en déduit que le pendule a tourné de 0,053°.

Modélisation du pendule de torsion :

Le pendule de torsion *(représentée figure 1)* est constitué par une barre horizontale de longueur $2R$ suspendue en son centre O à l'extrémité inférieure d'un fil métallique dont l'extrémité supérieure est reliée à un support fixe. La barre peut tourner autour de l'axe Oz vertical ascendant matérialisé par le fil. Le fil métallique exerce sur la barre une action mécanique de rappel dont le moment par rapport à l'axe Oz est $\Gamma_{Oz} = -C\theta$ où θ est l'angle que fait la barre par rapport à sa position d'équilibre et C la constante de torsion du fil.

Aux extrémités de la barre horizontale repérées par les points A_1 et A_2 sont fixées deux masse m identiques.

Figure 1 : **pendule de torsion**



On note $J = 2\,m\,R^2$ le moment d'inertie du système S constitué par la barre horizontale et les deux masses m par rapport à l'axe Oz.

Dans tous le problème, le référentiel terrestre de repère d'espace $R(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ sera considéré comme galiléen.

Première étape de l'expérience : détermination de la constante de torsion

On écarte légèrement la barre d'un angle θ_0 par rapport à sa position d'équilibre et on la lâche sans vitesse initiale. Le système se met à osciller sans frottement à la période T_0 autour de l'axe (Oz).

1. Justifier l'expression du moment d'inertie du système (S).

2. En appliquant le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe *(Oz)* au système *(S)*, établir l'équation différentielle du mouvement en θ du système *(S)* puis la résoudre.

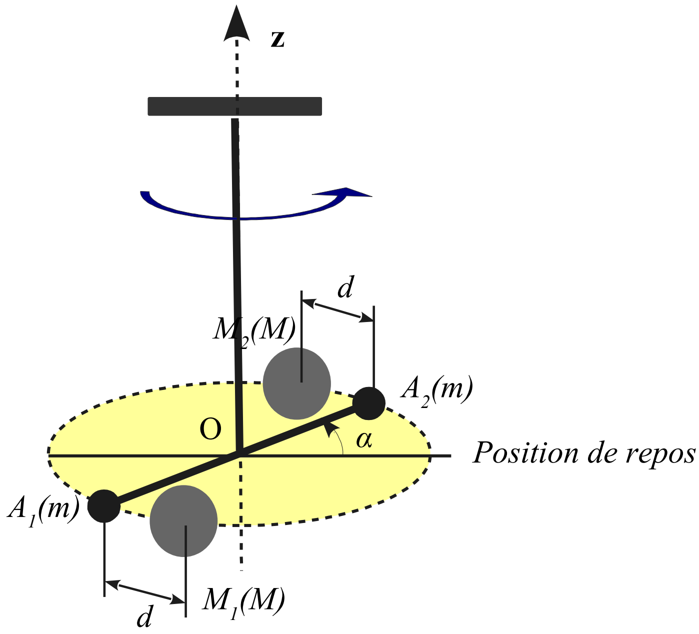
3. En déduire la constante de torsion C du fil de torsion en fonction de m, R et T_0.

4. Application numérique : Déduire de l'étude précédente la constante de torsion C du pendule de Cavendish exprimé en unités SI.

Deuxième étape de l'expérience : Détermination de la constante de gravitation G

Le système est maintenant au repos. Aux points M_1 et M_2, distants respectivement de d de A_1 et A_2, on place deux masses $M >> m$ *(figure 2).* Sous l'effet des interactions de gravitation, entre les masses m et M, la tige tourne d'un angle α très faible mais mesurable par rapport à sa position d'équilibre initiale.

Figure 2 : **ajout de masses**



La rotation étant très faible, on suppose d constant *(la figure 2 n'est pas à l'échelle !)*.

On note G la constante de gravitation universelle.

On néglige l'action gravitationnelle exercée par la terre sur le système.

5. Montrer que les masses situées en M_1 et M_2, exercent par les interactions de gravitation un couple de forces sur le système *(on pourra s'aider d'un schéma dans le plan du mouvement)*. En déduire le moment du couple $\vec{\Gamma}_g$ exercé sur le système *(S)* au point O en fonction de m, M, d, R et G. Puis son moment Γ_{gz} par rapport à l'axe Oz.

6. En appliquant le théorème du moment cinétique au système *(S)* par rapport à l'axe Oz, exprimer la constante de gravitation universelle G en fonction de M, d, R, α et T_0.

7. <u>Application numérique :</u> Déduire la valeur numérique de G obtenu par Cavendish dans son expérience. La valeur estimée de nos jours est : $G=(6{,}73384 \pm 0{,}0008)10^{-11}\,SI$. Commenter le résultat obtenu.

FIN de l'énoncé

Correction problème 1 : *(d'après concours ATS 2015)*

Première partie : Particule dans un champ électrique constant et uniforme

1. $\boxed{\vec{F} = e\vec{E}}$

2. On calcule le poid : $mg \approx 1{,}6.10^{-27} \times 10 = 1{,}6.10^{-26} N$

On calcule la force électrique : $eE \approx 1{,}6.10^{-19} 100.10^{3} = 1{,}6.10^{-4} N$

On fait le rapport des deux modules : $\boxed{\frac{eE}{mg} \approx \frac{1{,}6.10^{-14}}{1{,}6.10^{-26}} = 10^{12} \gg 1}$. On peut négliger le poids devant la force électrique.

3. D'après le principe fondamental de la dynamique appliqué au proton en négligeant le poids: $m_p \vec{a} = e\vec{E}$ d'où $\boxed{\vec{a} = \frac{e}{m_p}\vec{E}}$.

4. Pour calculer l'énergie potentielle dont dérive la force $\vec{F}$, on calcule son travail élémentaire : $\delta W_{\vec{F}} = e\vec{E}.\vec{dl} = e\,E\,dx = -d\,E_p$ d'où $\frac{d\,E_p}{dx} = -e\,E$ d'où : $\boxed{E_p(x) = -e\,E\,x + K_1 = e\,V(x)}$. Par identification $\boxed{V(x) = -E\,x + K}$.

5. V(0) = 0, on en déduit K=0 et $\boxed{V_L = -E\,L}$.

6. On applique le théorème de l'énergie cinétique au photon entre x=0 et x=L : $E_C(L) - E_C(0) = W_F = E_p(0) - E_p(L) = -e\,V_L = e\,E\,L$ d'où $\boxed{E_C(L) = -e\,V_L = eE\,L}$

Deuxième partie : Un accélérateur linéaire de particules : le Linac 2

7. D'après la question précédente, l'accroissement d'énergie cinétique est $\boxed{\Delta E_C = e\,U_c}$

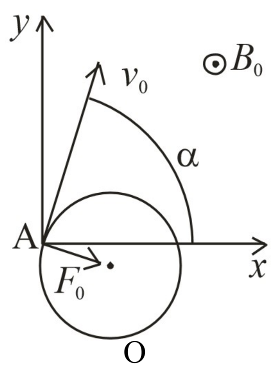
8. $\boxed{E_{Csn} = e\,U_0 + (n-1)\,e\,U_c}$.

9. $\boxed{E_{Cs10} = \frac{1}{2} m\,v^2 = e\,U_0 + 9\,e\,U_c}$ d'où $\boxed{v = \sqrt{2\frac{e}{m}(U_0 + 9\,U_c)}}$ d'où :

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{2 \times 1{,}6.10^{-19}}{1{,}6.10^{-27}}(200 + 9 \times 2000)\,10^3} = 6{,}03.10^7\,m.s^{-1}}$$

10. $v \approx \frac{c}{5} < \frac{c}{3}$ le proton n'est donc pas relativiste.

Troisième partie : Du linac 2 au synchroton à protons (PS)



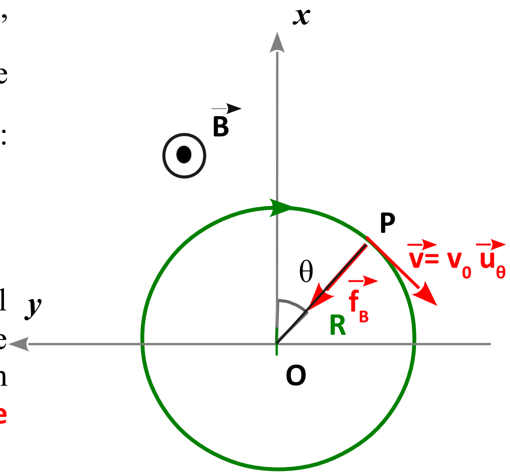
11. $\boxed{\vec{F} = e\,\vec{v} \wedge B_0}$ C'est la force de Lorentz

12. En A $\vec{V}_0$ et $\vec{B}_0$ sont orthogonaux donc la norme de $\vec{F}_0$ est $\boxed{F_0 = e\,v_0\,B_0}$.

13. $\delta W_{\vec{F}} = (e\,\vec{v} \wedge B_0).\vec{dl} = (e\,\vec{v} \wedge B_0).\vec{v}\,dt$. D'après le théorème de l'énergie cinétique appliqué au proton sous sa forme différentielle : $dE_C = \delta W_{\vec{F}} = 0$. l'énergie cinétique du proton est constante au cours du mouvement donc sa vitesse aussi donc le mouvement du proton est uniforme.

14. Voir figure précédente.

15. En coordonnées polaires $\vec{OP}=R\vec{u}_R$, $\vec{v}=R\dot{\theta}\vec{u}_\theta=v_0\vec{u}_\theta$, $\vec{a}=-R\dot{\theta}\vec{u}_R=\frac{-v_0^2}{R}\vec{u}_R$, de plus $\vec{F}=-e\,v_0 B_0\vec{u}_R$. D'après le principe fondamental de la dynamique appliqué au proton : $m_p\vec{a}=\vec{F}$ on en déduit : $m_p\frac{v_0^2}{R}=e\,v_0 B$ d'où : $\boxed{R=\frac{m_p v_0}{e\,B_0}}$.



16. On néglige l'influence du poids sur un temps de vol forcément court pour un proton ; d'après le Principe de l'inertie, en l'absence de force, le mouvement du proton en dehors de la zone de champ magnétique sera **rectiligne uniforme**.

Correction problème 2 : *(d'après article internet + concours national d'admission dans les grandes écoles d'ingénieurs)*

1. L'expression générale du moment d'inertie J par rapport à un axe donné , d'un système constitué de masses m_i est : $J=\sum_i m_i r^2$. Le système envisagé est constitué de 2 masse m à la distance R de l'axe de rotation donc $J=2\times m\,R^2$. On néglige la masse de la barre.

2. Bilan des actions s'exerçant sur *(S)* :

- Le poids $\vec{P}=2m\vec{g}$, $M_{Oz}(\vec{P})=0$ car le centre d'inertie de la barre est sur l'axe de rotation ;
- La tension du fil $\vec{T}=-T\vec{u}_z$, $M_{Oz}(\vec{T})=0$ car la tension est parallèle à l'axe.
- Couple de rappel dont le moment est : $\Gamma_{Oz}=-C\theta$

D'après de théorème du moment cinétique appliqué au solide *(S)* : $J\ddot{\theta}=M_{oz}(\vec{P})+M_{oz}(\vec{T})+\Gamma_{Oz}$, on en déduit : $J\ddot{\theta}=-C\theta$ d'où l'équation du mouvement : $\boxed{\ddot{\theta}+\omega_0^2\theta=0}$ avec $\boxed{\omega_0=\sqrt{\frac{C}{J}}}$.

La solution est du type : $\theta(t)=A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t)$

A t= 0 , $\theta=\theta_0$ on en déduit $A=\theta_0$

A t=0, $\dot{\theta}=0$, on en déduit B = 0. d'où $\boxed{\theta(t)=\theta_0\cos\omega_0 t}$.

3. $\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}=\sqrt{\frac{C}{J}}$ d'où $\boxed{C=\frac{8\,m\,R^2\pi^2}{T_0^2}}$.

4. Application numérique :

R = 1 + 0,025 = 1,025m (on tient compte du rayon des boules), *m=0,730 kg*, $T_0=7\times 60=420\text{s}$.

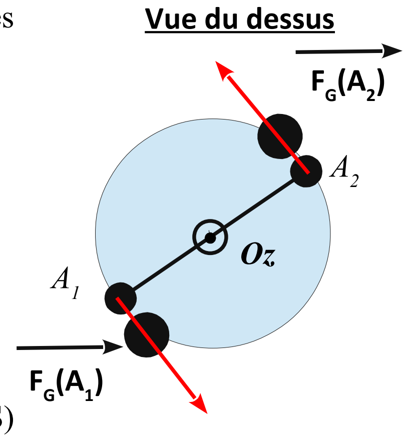
$$\boxed{C=\frac{8\times 0{,}730\times 1{,}025^2\pi^2}{420^2}=3{,}43.10^{-4}\,kg.m^2.s^{-2}}$$.

5. La masse M située en M_1 exerce sur A_1, la force de gravitation $\vec{F}_G(A_1)=\frac{-G\,m\,M}{d^2}\vec{u}_{d1}$ où $\vec{u}_{d1}=\frac{\vec{M_1A_1}}{d}$

La masse M située en M_2 exerce sur A_2, la force de gravitation $\vec{F}_G(A_2)=\frac{-G\,m\,M}{d^2}\vec{u}_{d2}$ où $\vec{u}_{d2}=\frac{\vec{M_2A_2}}{d}$

or $\vec{u_{d2}} = -\vec{u_{d1}}$ donc $\vec{F}_G(A_1)+\vec{F}_G(A_2)=\vec{0}$. L'ensemble des deux forces exerce un couple dont le moment est :

$$\Gamma_g = \overrightarrow{OA_1} \wedge \vec{F}_G(A_1) + \overrightarrow{OA_2} \wedge \vec{F}_G(A_2) = \overrightarrow{A_2 A_1} \wedge \vec{F}_G(A_1)$$



D'où : $\boxed{\vec{\Gamma}_g = \frac{2R\,G\,m\,M}{d^2}\vec{u}_z}$ et

$\boxed{\Gamma_{gz} = \vec{\Gamma}_g.\vec{u}_z = \frac{2R\,G\,m\,M}{d^2}}$.

6. D'après le théorème du moment cinétique appliqué à (S) $J\ddot{\theta} = M_{oz}(\vec{P}) + M_{oz}(\vec{T}) + \Gamma_{Oz} + \Gamma_{gz}$.

(S) est cette fois-ci à l'équilibre donc $J\ddot{\theta}=0$.

On a toujours $M_{oz}(\vec{P}) = M_{oz}(\vec{T}) = 0$ et $\Gamma_{Oz} = -C\alpha$. D'où $\boxed{\frac{2R\,G\,m\,M}{d^2} = C\alpha = \frac{8\,m\,R^2\pi^2\alpha}{T_0^2}}$ d'où

$\boxed{G = \frac{4R\pi^2\alpha\,d^2}{M\,T_0^2}}$

7. Application numérique :

$R=1{,}025m$, $\alpha = 0{,}053° = 9{,}25.10^{-4}\,rad$, $d= 0{,}225m$, $M=158kg$, $T_0 = 420s$.

$\boxed{G = \frac{4\times1{,}025\pi^2(9{,}25.10^{-4})0{,}225^2}{158\times420^2} = 6{,}80.10^{-11}\,SI}$. On peut faire un calcul d'erreur relative

$G = \frac{(6{,}798839-6{,}73384)}{6{,}73384}\times100 = 0{,}96 \approx 1\,\%$. L'erreur relative est très faible et le résultat obtenu, remarquable pour l'époque.